Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

76. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 31. JULI 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 83 03 01, Fernschreibnummer 01-83 319
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27 9 01, Fernschreibnummer 04-61 723
Göttingen, Weender Straße 60.

---

76. Band — **Inhalt** — 3. Heft

Seite

Rosenberg, A., Blocks and Centres of Group Algebras 209
Groemer, H., Lagerungs- und Überdeckungseigenschaften konvexer Bereiche mit gegebener Krümmung 217
Rieger, G. J., Über die Anzahl der Produktzerlegungen ganzer Zahlen 226
Heaton, R., A Note on Polynomial Cocycles 235
André, J., Über Parallelstrukturen. Teil III: Zentrale t-Strukturen 240
Miller, J. B., A class of series involving integral kernels. I 257
Macdonald, I. D., On Certain Varieties of Groups 270
Avann, S. P., Distributive properties in semi-modular lattices 283
Ishiguro, K., Zur Gibbsschen Erscheinung für das Kreisverfahren 288
Ahmad, J. U., On the absolute Cesàro summability factors of infinite series 295

ROSENBERG, A.
Math. Zeitschr. 76, 209—216 (1961)

Blocks and Centres of Group Algebras

By

ALEX ROSENBERG[1])

1. Introduction. In [3, 10B] BRAUER proved what is usually called the first main theorem on blocks. A somewhat different proof (although not quite complete, cf. Math. Rev. 17 (1956), p. 1182) was given by OSIMA in [4]. Both proofs use the theory of ordinary and modular characters in several essential points. Since blocks can be identified with the primitive idempotents of the centre of the group algebra while the characters correspond to the primitive idempotents of the algebra itself it seems desirable to supply a relatively simple proof which operates solely within the centres of the algebras in question and so does not use any tools from character theory. By combining the main ideas of [3] and [4] and recasting the definition of defect it is indeed possible to construct such a proof and this is carried out in the present note. It is hoped that the simplifications introduced will prove of some interest even though no really new results are obtained. In order to keep matters reasonably self-contained several lemmas with their proofs have been taken over verbatim from [3] and [4] and wherever this occurs appropriate references have been supplied.

In the present version no restrictions are placed on the ground field. Thus, it is not assumed, as it is in [3] and [4] that the field is large enough so that the absolutely irreducible representations of the group can be written in it. Finally, the main theorem and the methods of this paper are used to give a new proof of the theorem of BRAUER and NESBITT [2], which gives the number of blocks of highest defect.

This paper grew out of a series of talks given by the author in a seminar at the Institute for Advanced Study in 1955—56. Among the participants were I. REINER, P. ROQUETTE, E. STRAUSS, R. STEINBERG, and H. J. ZASSENHAUS. I express my thanks to all of them and especially to P. ROQUETTE for many illuminating comments. My thanks are also due to D. ZELINSKY for several suggestions.

2. Preliminaries and Notations. Let $\mathfrak{G}$ be a finite group of order g, p a fixed rational prime dividing g[2]) and $\mathfrak{F}$ a field of characteristic p. We shall write $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ for the group algebra of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{F}$ and let $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ be the centre of $\mathfrak{A}$. If $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$ are the classes of conjugate elements of $\mathfrak{G}$ and K_i, *the* i^{th} *class sum*, is the element of $\mathfrak{A}$ given by $\sum_{G \in \mathfrak{K}_i} G$, it is well

[1]) Written with the partial support of N.S.F. grants N.S.F.-G-1357 and N.S.F.-G-9508.

[2]) If p does not divide g, all the material remains formally valid but becomes trivial.

known that $K_1, K_2, \ldots, K_k$ are an $\mathfrak{F}$ basis of $\mathfrak{Z}$. In terms of this basis the multiplication in $\mathfrak{Z}$ is given by

$$K_i K_j = \sum_h a_{ijh} K_h \tag{2.1}$$

with a_{ijh} the residue class mod p of the number of ordered pairs (X, Y) of elements of $\mathfrak{G}$ satisfying

$$XY = G_h \qquad X \in \mathfrak{K}_i, \qquad Y \in \mathfrak{K}_j$$

for a fixed $G_h \in \mathfrak{K}_h$ [3, p. 409].

We shall use the notation $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}))$ for the normalizer (centralizer) of a subset, $\mathfrak{S}$, of $\mathfrak{G}$.

DEFINITION [3, (2.6)] [4, p. 176]. A p-Sylow subgroup of $\mathfrak{C}(G)$ is called a *defect group* of the class $\mathfrak{K}$ of G. Hence all defect groups of $\mathfrak{K}$ are conjugate and so have a common order, p^d. The integer d is called the *defect* of $\mathfrak{K}$.

We begin by introducing certain ideals in $\mathfrak{Z}$. In order to do this we need the following counting lemma which will be used several times.

LEMMA 2.1[3]. *Let $\mathfrak{D}$ be a p-subgroup of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ subsets of $\mathfrak{G}$ setwise invariant under conjugation by elements of $\mathfrak{D}$ and T a fixed element of $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$. Let S_T be the set of ordered pairs (X, Y) satisfying*

$$XY = T, \qquad X \in \mathfrak{X}, \qquad Y \in \mathfrak{Y}.$$

Then if $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ is empty, the cardinal of S_T is divisible by p.

PROOF. We partition S_T into non-overlapping classes by letting the class of a pair (X, Y) in S_T be all pairs (PXP^{-1}, PYP^{-1}) for all P in $\mathfrak{D}$. Hence the number of distinct elements in such a class is $[\mathfrak{D} : \mathfrak{D} \cap \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{C}(Y)] = p^e$ for some integer e. Since $Y \notin \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ it follows that $\mathfrak{C}(Y)$ does not contain $\mathfrak{D}$ and so $e \neq 0$. Hence the cardinal of every class and thus of all of S_T is divisible by p.

DEFINITION. $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ denotes the $\mathfrak{F}$-subspace of $\mathfrak{Z}$ spanned by the class sums of classes with defect groups conjugate to (not necessarily proper) subgroups of any defect group of $\mathfrak{K}$.

LEMMA 2.2 [4, Lemma 4]. *$\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ is an ideal of $\mathfrak{Z}$.*

PROOF. Let $K_j \in \mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ and K_i be any class sum. Then $K_i K_j = \sum a_{ijh} K_h$. Lemma 2.1 with $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_h$ a defect group of $\mathfrak{K}_h$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{K}_j$, T a fixed element of $\mathfrak{K}_h$, together with the remark right after (2.1) show $a_{ijh} = 0$ whenever $\mathfrak{K}_j \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_h) = \emptyset$[4]. Hence if $a_{ijh} \neq 0$, $\mathfrak{D}_h$ will commute with some element in $\mathfrak{K}_j$ and so $\mathfrak{D}_h$ is conjugate to a subgroup of a defect group of $\mathfrak{K}_j$ and so of $\mathfrak{K}$. Hence $K_h \in \mathfrak{J}(\mathfrak{K})$.

3. Blocks. Let $E_1, E_2, \ldots$ be the primitive idempotents of $\mathfrak{Z}$. Since $\mathfrak{Z}$ is commutative they are uniquely determined by the conditions: (i) $1 = \sum E_i$,

[3] Lemma 2.1 is a slight generalization of [3, p. 426] and [4, Lemma 3].
[4] $\emptyset$ denotes the empty set.

(ii) $E_iE_j=0$ if $i\neq j$, and (iii) every E_i cannot be decomposed further into a sum of orthogonal nonzero idempotents. Moreover, $\mathfrak{A}E_i$ is a completely primary algebra, i.e. if $\mathfrak{N}$ is the radical of $\mathfrak{A}$, then $\mathfrak{A}E_i/\mathfrak{N}E_i$ is a finite extension field of $\mathfrak{F}$. The canonical homomorphism, η_i, of $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}E_i/\mathfrak{N}E_i$ has kernel the maximal ideal $\mathfrak{A}(1-E_i)+\mathfrak{N}$. We shall refer to η_i as the irreducible representation of $\mathfrak{A}$ associated with E_i. Conversely every $\mathfrak{F}$-algebra homomorphism of $\mathfrak{A}$ into a finite extension field of $\mathfrak{F}$ arises from a primitive idempotent in this manner. Proofs of these well known results may be found for example in [*1*, chap. 9]. The E_i's will be called the *blocks* of $\mathfrak{A}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$.

LEMMA 3.1. *Let E be a block, η the corresponding irreducible representation of $\mathfrak{A}$, and $\mathfrak{J}$ an ideal of $\mathfrak{A}$ such that $\eta(\mathfrak{J})\neq 0$. Then $E\in\mathfrak{J}$.*

PROOF. Since $\eta(\mathfrak{J})$ is a nonzero ideal of the field $\eta(\mathfrak{A})$, we have $\eta(\mathfrak{J})=\eta(\mathfrak{A})$. Consequently $\eta(E)\in\eta(\mathfrak{J})$. Thus there are elements $I\in\mathfrak{J}$, $R\in\mathfrak{N}$ and $Z\in\mathfrak{A}$ with $I=E+Z(1-E)+R$. Hence $E=IE-RE$. Then, by raising both sides to the k^{th} power, we find $E=I_k+(-1)^k(RE)^k$ with $I_k\in\mathfrak{J}$. Since RE is nilpotent the lemma is proved.

PROPOSITION 3.2. *Let $E=\sum f_iK_i$ be a block and η its corresponding irreducible representation. Then the index set $I=\{i\,|\,f_i\neq 0$ in $E=\sum f_iK_i\}$*[5]*) can be partitioned into two disjoint subsets A and B such that the defect groups of $\mathfrak{K}_\alpha$, $\alpha\in A$, are all conjugate, while the defect groups of $\mathfrak{K}_\beta$, $\beta\in B$, are conjugate to proper subgroups of the defect groups of the $\mathfrak{K}_\alpha$, $\alpha\in A$. Furthermore, if $\mathfrak{K}$ is any class whose defect groups are conjugate to proper subgroups of the defect groups of some $\mathfrak{K}_\alpha$, $\alpha\in A$, then $\eta(K)=0$, while for at least one $\alpha\in A$, we have $\eta(K_\alpha)\neq 0$.*

PROOF. Since $\eta(1)=\eta(E)\neq 0$ there is some $i_0\in I$ with $\eta(K_{i_0})\neq 0$. But then by Lemmas 2.2 and 3.1, $E\in\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_{i_0})$. Then if we let $A=\{i\in I\,|$ defect groups of $\mathfrak{K}_i$ are conjugate to those of $\mathfrak{K}_{i_0}\}$ and $B=I-A$, the first conclusion is clear. Again, if the defect groups of $\mathfrak{K}$ are conjugate to proper subgroups of the defect groups of $\mathfrak{K}_{i_0}$ and $\eta(K)\neq 0$, we would have $E\in\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ which contradicts $f_{i_0}\neq 0$.

DEFINITION. Let $E=\sum_{\alpha\in A} f_\alpha K_\alpha+\sum_{\beta\in B} f_\beta K_\beta$, $f_\alpha, f_\beta\neq 0$, be a block written as in Proposition 3.2. Then the defect groups of $\mathfrak{K}_\alpha$, $\alpha\in A$, are called the *defect groups of E*. If their common order is p^d, d is called the *defect of E*.

REMARK. It follows from [*3*, 8A] or [*4*, Lemma 6 and Theorem 4] that this definition is equivalent to the one originally given by BRAUER.

The purpose of the main theorem of [*3*] is to exhibit a one-to-one correspondence of the blocks of $\mathfrak{A}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ whose defect groups are conjugate to $\mathfrak{D}$ with those of $\mathfrak{A}(\mathfrak{N}(\mathfrak{D}),\mathfrak{F})$. To this end we make the following

DEFINITION [*3*, 7B]. Let $\mathfrak{D}$ be a p-subgroup of $\mathfrak{G}$. For any class sum K in $\mathfrak{A}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ let $\sigma(K)=$ the sum of all elements in $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ if such elements exist, 0 otherwise.

[5]) By the use of modular characters it can be shown that all the $\mathfrak{K}_i$, $i\in I$, are p-regular classes [*4*, p. 177].

LEMMA 3.3 [3; 7B, 7C]. *If σ is extended to all of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ by linearity, a homomorphism*

$$\sigma : \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}) \to \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(\mathfrak{D}), \mathfrak{F})$$

is obtained. Ker σ *is spanned by the class sums K with $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \emptyset$.*

PROOF. Let $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$. Then clearly $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ is normal in $\mathfrak{H}$ and so $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ is closed under conjugation by elements of $\mathfrak{H}$ for any class $\mathfrak{K}$. Thus $\sigma(K)$ is a linear combination of class sums of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ and hence σ is a linear mapping from $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ into $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$.

It only remains to prove that $\sigma(K_i K_j) = \sigma(K_i)\sigma(K_j)$. Let $K = \sigma(K) + K'$ so that K' is the sum of the elements of $\mathfrak{K}$ not in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ and $\mathfrak{K}'$ is the set of summands of K'. By (2.1)

$$(3.1) \qquad (\sigma(K_i) + K_i')(\sigma(K_j) + K_j') = \sum a_{ijh}(\sigma(K_h) + K_h').$$

The elements of $\mathfrak{G}$ that occur as summands in $\sigma(K_i)\sigma(K_j)$ all lie in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ while those in $K_i'\sigma(K_j)$ and $\sigma(K_i)K_j'$ do not. Now applying Lemma 2.1 to $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}_i'$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{K}_j'$ and T any element of $\mathfrak{K}_i'\mathfrak{K}_j' \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ shows that the coefficient in $K_i'K_j'$ of any element of $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ is 0. Thus (3.1) yields

$$\sigma(K_i)\sigma(K_j) = \sum a_{ijh}\sigma(K_h) = \sigma(K_i K_j).$$

LEMMA 3.4 [3, 10A]. *If $\mathfrak{K}$ is a class of $\mathfrak{G}$ having $\mathfrak{D}$ as one of its defect groups and $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, then $\sigma(K)$ is a single class sum in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ with defect group $\mathfrak{D}$. Conversely, if $\mathfrak{L}$ is a class of $\mathfrak{H}$ having $\mathfrak{D}$ for its (unique) defect group, then there is a class sum K in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ with $\sigma(K) = L$.*

PROOF. There is an element $G \in \mathfrak{K}$ such that $\mathfrak{D}$ is a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{C}(G)$. Hence $G \in \mathfrak{H}$. If $G' \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ there is an $X \in \mathfrak{G}$ such that $XGX^{-1} = G'$. Since $G' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}$ is a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{C}(G') = X\mathfrak{C}(G)X^{-1}$. But $X\mathfrak{D}X^{-1}$ is one also and so there is a $Y \in \mathfrak{C}(G')$ with $Y\mathfrak{D}Y^{-1} = X\mathfrak{D}X^{-1}$; hence $Y^{-1}X \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$. Since Y commutes with G' we have $G' = Y^{-1}XGX^{-1}Y$ so that G' is conjugate to G in $\mathfrak{H}$. Finally, as we already saw in the proof of Lemma 3.3, if H is any element of $\mathfrak{H}$ conjugate to G in $\mathfrak{H}$, then $H \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$. Thus $\sigma(K)$ is a class sum in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$.

For the converse, let $H \in \mathfrak{H}$ and suppose the centralizer, $\mathfrak{C}(H) \cap \mathfrak{H}$, of H in $\mathfrak{H}$ has $\mathfrak{D}$ as p-Sylow subgroup. Let $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}$ be a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{C}(H)$. If $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}$, it is well known (e.g. [6; Chap. IV, Theorem 6]), that there is an element P_1 in $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) \cap \mathfrak{D}_1$ but not in $\mathfrak{D}$. But then the group generated by P_1 and $\mathfrak{D}$ would be a p-subgroup of $\mathfrak{C}(H) \cap \mathfrak{H}$ containing $\mathfrak{D}$ properly, which is impossible. Hence $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$ is also a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{C}(H)$. Thus if the class of H in $\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{K}$ and its class in $\mathfrak{H}$ is $\mathfrak{L}$, the first part of the Lemma shows $\sigma(K) = L$.

PROPOSITION 3.5. *Let $\mathfrak{D}$ be a p-subgroup of $\mathfrak{G}$, let σ be the homomorphism of Lemma 3.3, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, and let $E = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha K_\alpha + \sum_{\beta \in B} f_\beta K_\beta$ be a block written as in Proposition 3.2 for which $\mathfrak{D}$ is a defect group. Then $\sigma(E) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \sigma(K_\alpha)$ is*

a nonzero idempotent of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$. *Furthermore* σ *induces a one-to-one mapping of the blocks of* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ *into idempotents of* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$.

PROOF. By Proposition 3.2 the defect groups of $\mathfrak{K}_\beta$, $\beta \in B$, are conjugate to proper subgroups of $\mathfrak{D}$, hence $\mathfrak{K}_\beta \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \emptyset$ and $\sigma(K_\beta) = 0$. Since by Lemma 3.4 the $\sigma(K_\alpha)$ are distinct class sums and by Lemma 3.3 σ is an algebra homomorphism, $\sigma(E)$ is a nonzero idempotent. If E and E' are two blocks with $\mathfrak{D}$ as one of their defect groups and with $\sigma(E) = \sigma(E')$ then, writing them as in Proposition 3.2, we must have

$$E = \sum f_\alpha K_\alpha + \sum f_\beta K_\beta \qquad E' = \sum f_\alpha K_\alpha + \sum f'_\beta K_\beta ,$$

where possibly some of the f_β, f'_β are 0. Now if η is the irreducible representation corresponding to E we have $\eta(K_\beta) = 0$. Hence $\eta(E) = \eta(E')$. But if E and E' really were distinct $\eta(E) = 1$ and $\eta(E') = 0$. Thus $E = E'$.

4. Normal p-subgroup. To a certain extent Proposition 3.5 has reduced the problem to the case where the defect group of the blocks in question is normal (and hence unique). Therefore throughout this section we shall assume that $\mathfrak{D}$ *is a normal* p*-subgroup of* $\mathfrak{G}$.

We first obtain a more precise description (Corollary 4.3) of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ for a class $\mathfrak{K}$ with defect group $\mathfrak{D}$.

LEMMA 4.1 [4, p. 183]. *The* $\mathfrak{F}$*-subspace,* $\mathfrak{V}$, *spanned by the class sums of classes with defect group* $\mathfrak{D}$ *is a subalgebra.*

PROOF. Let $K, K' \in \mathfrak{V}$. By Lemma 2.2, $KK' = \sum g_i K_i + \sum g_j K_j$ with $K_i \in \mathfrak{V}$ and K_j class sums of classes $\mathfrak{K}_j$ whose defect groups are conjugate to proper subgroups of $\mathfrak{D}$. The homomorphism σ defined above now is an algebra endomorphism of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ and it is clear that if $K \in \mathfrak{V}$ then $\sigma(K) = K$ while $\sigma(K_j) = 0$. Hence $KK' = \sigma(K)\sigma(K') = \sigma(KK') = \sum g_i K_i$.

LEMMA 4.2. *Let* τ *be the algebra homomorphism* $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ *induced by the natural group homomorphism* $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. *Then* Ker τ *is nilpotent. Furthermore, if* $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \emptyset$ *then* $\tau(K) = 0$ *and so* K *is nilpotent.*

PROOF. Since the characteristic of $\mathfrak{F}$ is p it is well known that $\mathfrak{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ is a local algebra whose radical (unique maximal ideal) is the ideal spanned by the elements $P - 1$[6]). Hence this ideal is nilpotent and so any sufficiently long product $\prod (P_i - 1)$, $P_i \in \mathfrak{D}$, is 0.

A routine calculation shows that Ker τ is the subspace of $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ spanned by elements of the form $G(P-1)$, $G \in \mathfrak{G}$, $P \in \mathfrak{D}$. Since $\mathfrak{D}$ is normal in $\mathfrak{G}$ we have $G(P-1)G'(P'-1) = GG'(P''-1)(P'-1)$ where P, P', P'' all are in $\mathfrak{D}$. Hence any sufficiently long product $\prod G_i(P_i - 1)$ is 0 and thus Ker τ is nilpotent.

Next, restricting τ to $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ we have for any class sum K, $\tau(K) = n\overline{K}$. Here $\overline{K}$ is a class sum in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ and n is the number of distinct conjugates of a fixed element $G \in \mathfrak{K}$ which are congruent to G modulo $\mathfrak{D}$. Now suppose

[6]) This follows from [3, 3B]. An extremely simple direct proof is given in [5, p. 703].

$\mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \emptyset$ and set $\mathfrak{X} = G^{-1}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{K}$. Then n is simply the cardinal of the set S_1 as defined in Lemma 2.1, and this Lemma shows that $n \equiv 0 (p)$. Hence $\tau(K) = 0$, $K \in \operatorname{Ker} \tau$, and so is K nilpotent.

COROLLARY 4.3. *Let $\mathfrak{K}$ be a class with defect group $\mathfrak{D}$. Then $\mathfrak{Z}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$*[7]) *where $\mathfrak{V}$ is the subalgebra of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ defined in Lemma 4.1 and $\mathfrak{W}$ is a nilpotent ideal of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$.*

PROOF. Let $\mathfrak{W}$ be the complement of $\mathfrak{V}$ spanned by the class sums with defect groups which are proper subgroups of $\mathfrak{D}$. By Lemma 3.3 $\mathfrak{W} = \operatorname{Ker} \sigma \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ and so is an ideal. Since $\mathfrak{W}$ admits a basis of nilpotent elements and $\mathfrak{Z}$ is commutative, $\mathfrak{W}$ is nilpotent.

PROPOSITION 4.4. *The defect groups of any block of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ contain $\mathfrak{D}$. If the order of $\mathfrak{D}$ is p^d then any block of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ of defect d lies in $\mathfrak{V}$.*

PROOF. Let E be a block with $\mathfrak{D}_E$ as one of its defect groups and suppose $E = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha K_\alpha + \sum_{\beta \in B} f_\beta K_\beta$ in the notation of Proposition 3.2. If $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{D}_E$ then for all $\alpha \in A$ and $\beta \in B$ we have $\mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{K}_\beta \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \emptyset$. Thus $E \in \operatorname{Ker} \sigma$, a nilpotent ideal, which is impossible.

Now suppose E is a block of defect d. By the first part of the Proposition, the defect group of E is $\mathfrak{D}$. Hence by Corollary 4.3, $E = V + W$ with $V \in \mathfrak{V}$, $W \in \mathfrak{W}$. But there is an integer k with $W^{p^k} = 0$. Hence $E = V^{p^k} \in \mathfrak{V}$ by Lemma 4.1.

5. The main theorem. We now return to the general situation with $\mathfrak{D}$ a p-subgroup of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ and σ the homomorphism of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ into $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ defined in 3. Only two steps remain in the proof of the main theorem.

LEMMA 5.1. *If E is a block of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ with $\mathfrak{D}$ as one of its defect groups, then $\sigma(E)$ is a block of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ with defect group $\mathfrak{D}$.*

PROOF. In view of Lemma 3.4 and Proposition 3.5 all that remains is to show that $\sigma(E)$ is primitive. If $\sigma(E)$ is not primitive, then $\sigma(E) = \sum_{i=1}^{t} F_i$, $t > 1$, where the F_i are orthogonal primitive idempotents of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$. Let η_i be the irreducible representation of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ corresponding to F_i so that $\eta_i \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ is a finite extension field of $\mathfrak{F}$. Since for each η_i we have $\eta_i \sigma(E) = 1$, the composite mappings $\eta_i \sigma$ are nonzero homomorphisms of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ onto subfields, $\mathfrak{F}_i$, of $\eta_i \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$. These irreducible representations of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ are all equivalent, i.e. there are $\mathfrak{F}$-isomorphisms φ_{ij} of $\mathfrak{F}_j$ onto $\mathfrak{F}_i$ such that $\varphi_{ij} \eta_j \sigma = \eta_i \sigma$.

By Proposition 4.4 the defect groups of each F_i contain $\mathfrak{D}$. If for some i_0 the defect groups of F_{i_0} were to contain $\mathfrak{D}$ properly, $\eta_{i_0}(\mathfrak{V}) = 0$ by Proposition 3.2. But then $\eta_{i_0} \sigma(E) = 0$, which is impossible. Thus all the F_i are in $\mathfrak{V}$. By Lemma 3.4 we may therefore write

$$F_i = \sum_j f_{ij} \sigma(K_j),$$

[7]) Vector space direct sum.

where each $\mathfrak{K}_j$ has $\mathfrak{D}$ for one of its defect groups. Since $t>1$ we have

$$0=\eta_2(F_1)=\eta_2\sigma\left(\sum_j f_{1j}K_j\right)=\varphi_{21}\eta_1\sigma\left(\sum_j f_{1j}K_j\right)=\varphi_{21}\eta_1(F_1)=1,$$

which is a contradiction. Thus $\sigma(E)$ is primitive.

LEMMA 5.2. *Let the order of $\mathfrak{D}$ be p^d. Let F be a block of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ of defect d. Then there is a block, E, of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ having $\mathfrak{D}$ as one of its defect groups with $\sigma(E)=F$.*

PROOF. By Proposition 4.4, $F\in\mathfrak{V}$. Let η' be the irreducible representation of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ corresponding to F. Since by Lemma 3.4 $\mathfrak{V}$ is contained in $\sigma\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$, we have $\eta'\sigma\neq 0$. Then $\eta'\sigma\neq 0$ is an irreducible representation of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ and so corresponds to a block E. Let $E=\sum_{\alpha\in A} f_\alpha K_\alpha+\sum_{\beta\in B} f_\beta K_\beta$ in the notation of Proposition 3.2. Then $\eta'\sigma(K_\beta)=0$ while $\eta'\sigma(K_{\alpha_0})\neq 0$ for some $\alpha_0\in A$. If $\mathfrak{K}_{\alpha_0}\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{D})=\emptyset$ then $\sigma(K_{\alpha_0})=0$. Therefore the defect groups of $\mathfrak{K}_{\alpha_0}$, and so of E, contain subgroups conjugate to $\mathfrak{D}$. But if the defect groups of E were to contain $\mathfrak{D}$ properly, then by Proposition 3.2 and Lemma 3.4, $\eta'(\mathfrak{V})=0$ which contradicts $\eta'(F)=1$. Hence the defect groups of E are conjugate to $\mathfrak{D}$. Lemma 5.1 then shows that $\sigma(E)$ is primitive. But then since $\eta'\sigma(E)=\eta'(F)$, we have that $\sigma(E)=F$.

Combining Proposition 3.5, Lemmas 4.4, 5.1, and 5.2 yield

THEOREM 5.3. *Let $\mathfrak{G}$ be a finite group of order divisible by p, let $\mathfrak{D}$ be a subgroup of order p^d and let $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ be its normalizer. Then if $\mathfrak{F}$ is any field of characteristic p there is a one-to-one correspondence between the blocks of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ with $\mathfrak{D}$ as one of their defect groups and the blocks of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ of defect d. The latter have $\mathfrak{D}$ as their defect group.*

If $\mathfrak{F}$ contains the g^{th} (g = the order of $\mathfrak{G}$) roots of unity, Theorem 5.3 is [*3*, 10B] and [*4*, Theorem 6].

6. Blocks of highest defect. As an application of our methods we give a new proof of an old result of BRAUER and NESBITT [*2*, Theorem 2] and [*3*, 6D]. We recall that a class $\mathfrak{K}$ is said to be p-regular if the order of its elements is prime to p, and is called p-singular otherwise.

THEOREM 6.1. *Let the order of $\mathfrak{G}=p^a g'$, $(p,g')=1$. Let $\mathfrak{F}$ be an algebraically closed field of characteristic p. Then the number of blocks of defect a of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ is the number of p-regular classes of defect a.*

PROOF. A block of defect a has the p-Sylow subgroups for its defect groups. If $\mathfrak{D}$ is one of these and $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ then Theorem 5.3 shows that the number of blocks of defect a of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\mathfrak{F})$ is the same as the number of blocks of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ of defect a. Since p^a is also the highest power of p dividing the order of $\mathfrak{H}$, Proposition 4.4 shows that these are all the blocks of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$. Furthermore, Lemma 3.4 shows that the number of p-regular classes of defect a is the same in $\mathfrak{H}$ as in $\mathfrak{G}$, so that it is sufficient to work entirely in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$.

As in Lemma 4.2, let τ be the homomorphism

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\to\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D},\mathfrak{F})$$

induced by the natural homomorphism $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}/\mathfrak{D}$. By Lemma 4.2, Ker τ is nilpotent. Hence it is a standard result that there is a one-to-one correspondence between the idempotents of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ and those of Im τ (cf. e.g. [*1*, Theorem 9, 3 C]).

Now, since the order of $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$ is prime to p, $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ is a semisimple algebra. Consequently, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ and all its subalgebras are also semisimple. Since $\mathfrak{F}$ is algebraically closed this means that these algebras are just direct sums of copies of $\mathfrak{F}$. Therefore the number of blocks of defect a is $[\text{Im } \tau : \mathfrak{F}]$.

Next, let $\mathfrak{L}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, be the p-regular classes of defect a of $\mathfrak{H}$. If $\mathfrak{L}$ is a class whose defect is less than a, Lemma 4.2 shows $\tau(L) = 0$. If $\mathfrak{L}$ is p-singular and $H \in \mathfrak{L}$, then $H = PR$ with P and R powers of H, the order of R prime to p, and the order of P a power of p[8]). But $\mathfrak{D}$ is the unique p-Sylow subgroup of $\mathfrak{H}$ and so $P \in \mathfrak{D}$ and $\tau(H) = \tau(R)$. Moreover $\mathfrak{C}(R) > \mathfrak{C}(H)$ and so R is in some $\mathfrak{L}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Hence Im τ is spanned by $\tau(L_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Finally, let $H, H' \in \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{L}_i$. If $\tau(H) = \tau(H')$ then $H = H'P$ with $P \in \mathfrak{D}$. But since $\mathfrak{D} < \mathfrak{C}(H')$ and the order of H is prime to p this means that $P = 1$. Hence τ induces a one-to-one mapping on $\bigcup_{1}^{r} \mathfrak{L}_i$. Thus each $\tau(L_i)$ is a single class sum of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ and the $\tau(L_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ are linearly independent elements of $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$. Thus $[\text{Im } \tau : \mathfrak{F}] = r$ and Theorem 6.1 is proved.

REMARK. The hypothesis that $\mathfrak{F}$ be algebraically closed is too strong. All that is needed is to have $\mathfrak{F}$ large enough so that the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$ can be written in it: For then $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}/\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$ is a direct sum of copies of $\mathfrak{F}$ and it can easily be seen that all its subalgebras are of the same form.

References

[*1*] ARTIN, E., C. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948.

[*2*] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular characters of groups. Ann. Math. **42**, 556–590 (1941).

[*3*] BRAUER, R.: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. Math. Z. **63**, 406–444 (1956).

[*4*] OSIMA, M.: Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama University **4**, 175–188 (1955).

[*5*] RIM, D. S.: Modules over finite groups. Ann. Math. **69**, 700–712 (1959).

[*6*] ZASSENHAUS, H. J.: The Theory of Groups. New York 1958.

[8]) If the order of $H = p^i m$, $(p, m) = 1$, and a, b are integers such that $1 = a p^i + b m$ then $P = H^{bm}$, $R = H^{a p^i}$.

Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, Ill. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. August 1960)

Groemer, H.
Math. Zeitschr. 76, 217–225 (1961)

Lagerungs- und Überdeckungseigenschaften konvexer Bereiche mit gegebener Krümmung

Von
Helmut Groemer

1. Unter einem konvexen Bereich soll im folgenden stets eine beschränkte abgeschlossene konvexe ebene Punktmenge mit inneren Punkten verstanden werden. (K_i) $(i=1, 2, \ldots)$ sei eine Menge untereinander kongruenter konvexer Bereiche. Haben je zwei K_i höchstens Randpunkte gemeinsam, so heiße (K_i) eine Lagerung. Liegt hingegen jeder Punkt der Ebene in mindestens einem K_i, so heiße (K_i) eine Überdeckung. Falls eine Überdeckung vorliegt, soll außerdem stets vorausgesetzt werden, daß sich die Ränder von je zwei K_i in höchstens zwei Punkten schneiden. Diese Bedingung ist z. B. immer erfüllt, wenn alle K_i untereinander translationsgleich sind. Besitzt (K_i) eine Dichte d (für die Definition der Dichte siehe etwa Fejes Tóth [1]), so gilt offenbar für eine Lagerung

$$d \leqq 1 \tag{1}$$

und für eine Überdeckung

$$d \geqq 1. \tag{2}$$

Im allgemeinen lassen sich (1) und (2) nicht verbessern. Der Zweck der folgenden Darlegungen ist, Verschärfungen von (1) und (2) anzugeben, wenn die obere oder die untere Grenze des Krümmungsradius des Randes von K_i gegeben ist.

2. Ist K ein beliebiger konvexer Bereich, so werde dessen Flächeninhalt mit $|K|$ und der Rand von K mit K^0 bezeichnet. Ohne es jedesmal hervorzuheben, möge stets vorausgesetzt werden, daß alle vorkommenden Dichten und Krümmungsradien existieren. Der Krümmungsradius ϱ von K^0 in einem Punkte $P \in K^0$ soll gemäß der folgenden bekannten Definition erklärt werden: Es sei X ein von P verschiedener Punkt auf K^0 und $\varrho(X, P)$ der Radius eines Kreises der durch X geht und K^0 in P berührt, das heißt, in P eine Tangente hat, die dort Stützgerade von K ist. Existiert

$$\varrho = \lim_{X \to P} \varrho(X, P), \tag{3}$$

so sei dies der Krümmungsradius von K^0 in P. Daß $\varrho = 0$ oder $\varrho = \infty$ ist, soll stets zulässig sein. Es sei noch darauf hingewiesen, daß man für alles Weitere auf die Existenz von (3) verzichten kann, wenn man in den Sätzen 1 und 3 als Krümmungsradius

$$\lim_{X \to P} \varrho(X, P) \tag{4}$$

und in den Sätzen 2, 4 als Krümmungsradius

$$\overline{\lim_{X \to P}} \varrho(X, P) \tag{5}$$

definiert. Damit erhalten die angeführten Sätze für beliebige konvexe Bereiche einen Sinn.

3. Die folgenden Resultate sollen bewiesen werden:

SATZ 1. *Es sei K ein konvexer Bereich und (K_i) eine Lagerung oder Überdeckung mit zu K kongruenten K_i. Bedeutet d die Dichte von (K_i) und ist r die untere Grenze des Krümmungsradius des Randes von K, so gilt für eine Lagerung*

$$d \leqq \frac{1}{1 + (2\sqrt{3} - \pi)\frac{r^2}{|K|}} \tag{6}$$

und für eine Überdeckung

$$d \geqq \frac{1}{1 - \left(\pi - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\frac{r^2}{|K|}} . \tag{7}$$

Ist K ein Kreis vom Radius r, so gibt es Lagerungen und Überdeckungen, derart daß in (6) bzw. (7) Gleichheit gilt. Für (7) ist der Kreis der einzige konvexe Bereich, für den Gleichheit gelten kann.

SATZ 2. *Haben K und d die im Satz 1 genannte Bedeutung und ist R die obere Grenze des Krümmungsradius des Randes von K, so gilt für eine Lagerung*

$$d \leqq \frac{|K|}{6R^2 \operatorname{tg} \frac{|K|}{6R^2}} \tag{8}$$

und für eine Überdeckung

$$d \geqq \frac{|K|}{3R^2 \sin \frac{|K|}{3R^2}} . \tag{9}$$

In (8) und in (9) kann Gleichheit dann und nur dann gelten, wenn K ein Kreis ist.

Aus den Ungleichungen (6) und (8) oder noch einfacher aus den nachstehenden Ungleichungen (12) und (14) erhält man die beiden folgenden Verschärfungen des Minkowskischen Gitterpunktsatzes. Satz 3 wurde für stetig gekrümmte Bereiche auf anderem Wege schon von J. G. VAN DER CORPUT und H. DAVENPORT [2] bewiesen. Unter Gitterpunkt soll ein Punkt eines ebenen Gitters der Determinante 1 verstanden werden.

SATZ 3. *Ist K ein konvexer Bereich der bezüglich eines Gitterpunktes symmetrisch ist, und bedeutet r die untere Grenze des Krümmungsradius des Randes von K, so enthält K mindestens ein Gitterpunktpaar, wenn*

$$|K| \geqq 4 - (2\sqrt{3} - \pi) r^2 \tag{10}$$

ist.

Satz 4. *Ist K wie in Satz 3 definiert und ist R die obere Grenze des Krümmungsradius des Randes von K, so enthält K mindestens ein Gitterpunktpaar, wenn*

$$|K| \geqq 6R^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3R^2} \tag{11}$$

gilt.

Die Sätze 3 und 4 können nicht verschärft werden, in dem Sinne, daß für einen Kreis (und in (11) auch nur für einen Kreis) in (10) und (11) Gleichheit gilt und K außer dem Mittelpunkt keinen Gitterpunkt eines geeigneten Gitters der Determinante 1 im Innern enthält.

4. Nach bekannten Sätzen, für deren Beweis auf das Buch von Fejes Toth [1] und die darin zitierte Literatur verwiesen werden kann, genügt es, die nachstehenden Ungleichungen (12), (13), (14), (15) zu beweisen. Dabei sollen, wie in allem weiteren, die folgenden Bezeichnungen verwendet werden. K ist ein nicht nur aus Randpunkten bestehender konvexer Bereich mit der oberen Grenze R und der unteren Grenze r des Krümmungsradius von K^0. $\overline{S}$ ist ein K umbeschriebenes und $\underline{S}$ ein K einbeschriebenes konvexes Sechseck. 3-, 4- und 5-Ecke sollen dabei stets als entartete Sechsecke mit einbezogen werden.

$$|\overline{S}| \geqq |K| + (2\sqrt{3} - \pi) r^2, \tag{12}$$

$$|\underline{S}| \leqq |K| - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) r^2, \tag{13}$$

$$|\overline{S}| \geqq 6R^2 \operatorname{tg} \frac{|K|}{6R^2}, \tag{14}$$

$$|\underline{S}| \leqq 3R^2 \sin \frac{|K|}{3R^2}. \tag{15}$$

Man erkennt sofort, daß man zudem noch $r = 1$ bzw. $R = 1$ voraussetzen kann. Es reicht also hin für $r = 1$

$$|\overline{S}| \geqq |K| + (2\sqrt{3} - \pi), \tag{16}$$

$$|\underline{S}| \leqq |K| - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \tag{17}$$

und für $R = 1$

$$|\overline{S}| \geqq 6 \operatorname{tg} \frac{|K|}{6} \tag{18}$$

$$|\underline{S}| \leqq 3 \sin \frac{|K|}{3} \tag{19}$$

zu zeigen. Daß in diesen vier Ungleichungen und damit in (6), (7), (8), (9) Gleichheit gilt, wenn K ein Kreis ist und $\overline{S}$, $\underline{S}$ reguläre Sechsecke sind, erkennt man durch einfaches Nachrechnen. Daß umgekehrt aus dem Bestehen der Gleichheit in (7), (8) oder (9), wofür Gleichheit in (17), (18) bzw. (19) notwendig ist, folgt, daß K ein Kreis sein muß, wird aus dem Beweis dieser Ungleichungen folgen.

Der Beweis von (16), (17), (18), (19) beruht wesentlich auf den folgenden Hilfssatz, der wohl als bekannt vorausgesetzt werden darf.

HILFSSATZ 1. *Ist P ein Punkt von K^0, so liegt ein Kreis C' vom Radius r, der K^0 in P berührt, innerhalb K (d.h. $C' < K$), und ein Kreis C'' vom Radius R, der K^0 in P berührt außerhalb K (d.h. C'' und $K - K^0$ haben keine gemeinsamen Punkte).*

Die einzige Eigenschaft von r und R, die für alles Weitere benützt wird, ist die im Hilfssatz 1 genannte. Dies ist auch der Grund, warum man zur Definition von r und R die Ausdrücke (4) bzw. (5) anstatt (3) verwenden kann.

Für den Beweis von (18) wird sich der folgende Hilfssatz als nützlich erweisen. Bedeutet k irgendeine Kurve oder Strecke, so soll $|k|$ dessen Länge sein. Ist k eine Strecke, so sei k^∞ die Gerade die k enthält. Unter Kreis, Dreieck usw. sollen die entsprechenden Bereiche und nicht deren Rand verstanden werden.

HILFSSATZ 2. *Es sei C ein Einheitskreis und D ein Dreieck mit den folgenden Eigenschaften:*

a) Eine Seite g von D tangiert C.

b) Der g gegenüberliegende Eckpunkt von D ist in C.

c) Ist h die auf g gefällte Höhe von D, so ist $h \leqq 1$.

Wird $G = C \cap D$ gesetzt, dann gilt unter diesen Voraussetzungen

$$|D| \geqq \operatorname{tg} |G| . \tag{20}$$

BEWEIS. Bedeutet m das Minimum von $|D| - \operatorname{tg}|G|$ für alle Dreiecke D, die bei gegebenen h die Bedingungen a), b), c) erfüllen, so ist $m \geqq 0$ zu zeigen. Da $|D| - \operatorname{tg}|G|$ eine stetige Funktion der drei Eckpunkte von D ist und weil die Koordinaten dieser Eckpunkte beschränkt sind, wenn man D etwa die Bedingung $|D| - \operatorname{tg}|G| \leqq m + 1$ auferlegt, folgt aus dem bekannten Satz von Weierstraß, daß m für ein gewisses Dreieck D angenommen wird. Es kann daher vorausgesetzt werden, daß für D

$$m = |D| - \operatorname{tg}|G| \tag{21}$$

gilt. Es sei nun s der in D liegende Kreisbogen von C^0. s habe die Endpunkte P_1, P_2. Ist P der Berührungspunkt von s mit g, so sei s_1 der Teilbogen von s mit den Endpunkten P_1, P und s_2 der Teilbogen von s mit den Endpunkten P_2, P. Es soll zunächst

$$|s_1| = |s_2| \tag{22}$$

bewiesen werden. Angenommen, es wäre

$$|s_1| < |s_2| . \tag{23}$$

Es sei dann C' ein Einheitskreis, der g in einem Punkte P' berühre. Man definiere wieder $G' = D \cap C'$, so daß $(G \cup G') - (G \cap G')$ aus zwei Kreisbogendreiecken M_1, M_2 besteht (zwei Seiten dieser Dreiecke sind Einheitskreisbogen, die dritte eine Strecke). Der Rand von M_1 enthalte s_1, der von M_2

enthalte s_2. Wählt man P' auf der Seite von P auf der s_2 liegt, so erkennt man, daß

$$G' = (G \cup M_2) - M_1 \tag{24}$$

gilt. Läßt man den Abstand $d = \overline{PP'}$ gegen null streben, so ergibt sich, daß die beiden gekrümmten Seiten von M_1 die Längen s_1, $s_1 + o(1)$ und diejenigen von M_2 die Längen s_2, $s_2 + o(1)$ haben. Da der Winkel zwischen diesen Seiten für M_1 und M_2 derselbe ist, erhält man aus (23)

$$|M_2| > |M_1|,$$

womit aus (24)

$$|G'| > |G| \tag{25}$$

folgt. Bedeutet D' dasjenige Dreieck, das aus D durch die Bewegung entsteht, die C' in C und P' in P überführt, so erfüllt D' die Bedingungen a), b), c) und es ist wegen (25)

$$|D' \cap C| - |G'| > |G|.$$

Daraus ergäbe sich

$$m = |D| - \operatorname{tg}|G| > |D'| - \operatorname{tg}|D' \cap C|,$$

was der Definition von m widerspräche. Es gilt also (22). Nun läßt sich aber auch leicht zeigen, daß unter der Voraussetzung (22) angenommen werden darf, daß P der Mittelpunkt von g ist. Um dies einzusehen, betrachte man irgendein Dreieck D^+, dessen eine Seite g^+ in g^∞ liegt, mit C einen gemeinsamen Punkt hat und für die

$$|g^+| = |g| \tag{26}$$

gilt. Die anderen Seiten von D' sollen durch P_1 bzw. P_2 gehen. Aus (22) folgt, daß die Gerade, die P_1 und P_2 verbindet parallel zu g ist und daraus erhält man mit (26), wenn h^+ und G^+ analog wie h und g aber mittels D^+ anstatt D definiert werden

$$|h^+| = |h|,$$
$$|D^+| = |D|,$$
$$|G^+| = |G|.$$

Man erhält daraus, daß für jedes D^+

$$m = |D^+| - \operatorname{tg}|G^+|$$

ist. Da D^+ den Bedingungen a), b), c) genügt und weil es sicherlich ein D^+ gibt, für das g^+ durch P halbiert wird, folgt die Behauptung.

D und G sollen daher von nun an als symmetrisch bezüglich der durch P und den Mittelpunkt von C gehenden Geraden vorausgesetzt werden. Bezeichnet W den zu s gehörigen Kreissektor von C und setzt man $H = W - G$, so hat man wegen $h \leqq 1$

$$|D| \geqq \operatorname{tg}\frac{|s|}{2} - |H|$$

$$|G| = \frac{|s|}{2} - |H|$$

und daher

$$|D| - \operatorname{tg}|G| \geqq \operatorname{tg}\frac{|s|}{2} - |H| - \operatorname{tg}\left(\frac{|s|}{2} - |H|\right). \tag{27}$$

Durch Differenzieren erkennt man, daß die rechte Seite von (27) mit $|H|$ monoton ansteigend ist; das Minimum also für $|H|=0$ angenommen wird. Das ergibt

$$m = |D| - \operatorname{tg}|G| \geqq 0$$

und der Hilfssatz ist bewiesen. Soll in (18) Gleichheit gelten, so ist notwendig, daß $|H|=0$ also $h=1$ gilt.

Zum Beweis von (19) wird der folgende Hilfssatz benötigt.

HILFSSATZ 3. *Es sei C ein Einheitskreis und D ein Dreieck mit den folgenden Eigenschaften:*

a) Zwei Eckpunkte P_1, P_2 von D liegen auf C^0.

b) Der dritte Eckpunkt P_3 von D liegt bezüglich der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden auf derselben Seite wie der Mittelpunkt von C.

c) Für die beiden Seiten l_1, l_2 von D, die P_3 und P_1 bzw. P_3 und P_2 verbinden gilt $l_1 \leqq 1$, $l_2 \leqq 1$.

Ist G der durch l_1, l_2 und einem Teilbogen von C^0 begrenzte konvexe Bereich, so gilt

$$|D| \leqq \tfrac{1}{2}\sin 2|G|. \tag{28}$$

BEWEIS. Zunächst erkennt man sofort, daß $l_1 = l_2 \leqq 1$ vorausgesetzt werden kann, weil man unter Erhaltung von $|D|$ und $|G|$ den Eckpunkt P_3 auf der durch P_3 gehenden Geraden, die zu der P_3 gegenüberliegenden Seite von D parallel ist, verschieben kann. Ist $s = G \frown C^0$ und W der durch s bestimmte Kreissektor, so gilt mit $H = W - G$

$$|D| = \tfrac{1}{2}\sin s - |H|$$
$$|G| = \tfrac{1}{2}\, s - |H|$$

und somit

$$|D| - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{2} = \frac{1}{2}\sin s - |H| - \sin\left(\frac{s}{2} - |H|\right). \tag{29}$$

Der rechts stehende Ausdruck ist, wie man wieder durch Differenzieren erkennt, monoton fallend, nimmt also das Maximum für $|H|=0$ an. Daraus folgt (28). Gleichheit kann in (28), wie man unmittelbar sieht, nur dann gelten, wenn $l_1 = l_2 = 1$ ist.

5. Nun sollen die angeführten Sätze bewiesen werden.

BEWEIS VON SATZ 1. Zuerst soll (6) oder, was dafür hinreichend ist, (16) bewiesen werden. Es seien g_1 und g_2 zwei benachbarte Seiten von $\bar{S}$. Der Winkel zwischen g_1 und g_2 sei α_1. Derjenige Teilbereich von $\bar{S} - K$, dessen Rand in g_1, g_2 und K^0 liegt, heiße K_1. Man denke sich noch einen Einheitskreis, der g_1 und g_2 berührt, gegeben und nenne den Bereich, dessen Rand

in g_1, g_2 und der Einheitskreislinie liegt, C_1. Es soll zunächst

$$C_1 < K_1 \tag{30}$$

bewiesen werden. Wäre (30) nicht erfüllt, so gäbe es einen Punkt $P \in K_1^0$, der im Innern von C_1 liegt. Man könnte dann einen Einheitskreis C_1' konstruieren, der K_1^0 in P berührt. Da C_1 die Seiten g_1, g_2 berührt, muß ein Teil von C_1' außerhalb $\overline{S}$ liegen und nach Hilfssatz 1 kann dann K nicht innerhalb $\overline{S}$ sein, weil $C_1' < K$ angenommen werden darf. Aus (30) erhält man

$$|K_1| \geqq \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}(\pi - \alpha_1) \tag{31}$$

und Entsprechendes gilt für die anderen Ecken mit den Winkeln α_i $(i = 1, \ldots, 6)$. Wegen $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 4\pi$ folgt aus (31)

$$|\bar{S}| \geqq |K| + \sum_{i=1}^{5} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_i}{2} - \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \alpha_i\right) + \pi. \tag{32}$$

Sucht man nach den bekannten Methoden der Differentialrechnung das Minimum der rechten Seite von (32), so findet man, daß es für $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}$ angenommen wird; man beachte dabei, daß $0 \leqq \frac{\alpha_i}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$ sein muß. Dieser Wert für α_i in (32) eingesetzt ergibt (16).

Nun zum Beweis von (7), wofür es genügt (17) zu zeigen. g_1, g_2 seien zwei benachbarte Seiten von $\underline{S}$, die sich im Eckpunkt P von $\underline{S}$ treffen. Der Winkel zwischen g_1 und g_2 sei α_1. C sei ein Kreis vom Radius 1, der K^0 in P berührt. Die beiden Radien von C, die senkrecht auf g_1 bzw. g_2 stehen, sollen mit r_1, r_2 bezeichnet werden. Ist C_1 der Bereich, dessen Rand in g_1, g_2, r_1, r_2, C^0 liegt, und ist β der Winkel zwischen r_1 und der Verbindungsgeraden von P mit dem Mittelpunkt von C, so findet man

$$|C_1| = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos(2\beta + \alpha_1)\right) \geqq \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha_1 - \sin\alpha_1). \tag{33}$$

Aus Hilfssatz 1 folgt sofort, daß C_1 in K und daher in $K - \underline{S}$ enthalten ist. Für die zu den andern Ecken von $\underline{S}$ gehörigen C_i und α_i gilt dasselbe. Außerdem läßt sich zeigen, daß zwei verschiedene C_i keine inneren Punkte gemeinsam haben. Dies folgt daraus, daß C zur Gänze innerhalb K liegt, r_1 und r_2 daher die Seiten g_1, g_2 zwischen P und dem Mittelpunkt von g_1 bzw. g_2 schneiden. Aus (33) erhält man demnach mit $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 4\pi$

$$|K - \underline{S}| \geqq \tfrac{1}{2}\left(2\pi - \sum_{i=1}^{5} \sin\alpha_i - \sin\left(4\pi - \sum_{i=1}^{5} \alpha_i\right)\right). \tag{34}$$

Das Minimum der rechten Seite von (34) wird wieder, unter Beachtung von $0 \leqq \alpha_i \leqq \pi$, für $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}$ angenommen, woraus sich sofort (17) ergibt. Soll in (17) Gleichheit gelten, so muß dies auch in (34) der Fall sein und daraus folgt, daß die C_i lückenlos aneinandergrenzen und $K = C$ ist.

BEWEIS VON SATZ 2. Zuerst soll (18) gezeigt werden, woraus dann (8) folgt. Aus Hilfssatz 1 erhält man, daß K in einem Kreis vom Radius 1 liegt. Es sei Q der Mittelpunkt dieses Kreises. Selbstverständlich darf angenommen werden, daß Q in K liegt. Durch Ziehen der Verbindungslinien der Eckpunkte von $\bar{S}$ mit Q wird $\bar{S}$ in sechs Dreiecke D_i $(i=1, \ldots, 6)$ zerlegt, wobei zu bemerken ist, daß einige der Dreiecke zu einer Strecke degeneriert sein können. Die Q gegenüberliegende Seite g_i von D_i berühre K etwa in einem Punkt P_i. Nach Hilfssatz 1 gilt für einen Kreis C_i der g_i in P_i berührt mit den Bezeichnungen $K_i = D_i \cap K$, $G_i = D_i \cap C_i$

$$K_i \subset C_i. \tag{35}$$

Da der Abstand zwischen Q und P_i nicht größer als 1 ist, gilt dasselbe für die Höhe von D_i. Es sind demnach für jedes D_i und C_i die Bedingungen a), b), c) des Hilfssatzes 2 erfüllt und man hat zusammen mit (35)

$$|D_i| \geqq \operatorname{tg} |G_i| \geqq \operatorname{tg} |K_i|.$$

Daraus bekommt man

$$|\bar{S}| \geqq \sum_{i=1}^{6} \operatorname{tg} |K_i|. \tag{36}$$

Beachtet man jetzt, daß $\operatorname{tg} x$ für $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ eine konvexe Funktion ist und daß wegen (35) $|K_i| < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt (Jensensche Ungleichung)

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \operatorname{tg} |K_i| \geqq \operatorname{tg} \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} |K_i| \right) = \operatorname{tg} \frac{|K|}{6}. \tag{37}$$

(36) und (37) ergeben (18). Gilt durchgehend das Gleichheitszeichen, so besteht der Rand von K, weil $K_i = G_i$ sein muß, aus sechs Einheitskreisbogen, deren Tangenten, wie aus dem am Ende des Beweises von Hilfssatz 2 Bemerkten hervorgeht, von dem Punkte Q den Abstand 1 haben. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß K ein Kreis ist.

Nun ist noch (9) zu beweisen, wofür es genügt (19) zu zeigen. Q und D_i seien analog wie vorhin definiert. Die von Q ausgehenden Seiten der D_i sollen mit l_i bezeichnet werden. Für die l_i hat man

$$|l_i| \leqq 1. \tag{38}$$

K_i sei der durch je zwei benachbarte l_i ausgeschnittene konvexe Teilbereich von K, und G_i sei derjenige konvexe Bereich, der aus K_i dadurch entsteht, daß man $K_i - D_i$ durch ein passendes Einheitskreissegment ersetzt. Es soll nun

$$G_i \subset K_i \tag{39}$$

gezeigt werden. Nimmt man an, daß (39) nicht richtig sei, so gäbe es einen inneren Punkt P von G_i, der auf dem konvexen Begrenzungsbogen b_i von K_i $(b_i \subset K^0)$ liegt. Konstruiert man den Einheitskreis C_i der b_i in P berührt, so muß offenbar einer der Eckpunkte von D_i, etwa P_i, nicht in C_i sein (P_i

bedeute einen von Q verschiedenen Eckpunkt von D_i). Andrerseits kann nach Hilfssatz 1 angenommen werden, daß b_i und daher auch P_i innerhalb C_i liegen. Gemäß der Definition von G_i und wegen (38) sind die Bedingungen a), b), c) des Hilfssatzes 3 erfüllt und man bekommt zusammen mit (39)

$$|\underline{S}| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} \sin 2|G_i| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} \sin 2|K_i|. \tag{40}$$

Weil $\sin x$ für $0 \leqq x < \pi$ konkav ist und $0 \leqq 2|K_i| < \pi$ ist, folgt wieder mittels der Jensenschen Ungleichung

$$\tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \sin 2|K_i| \leqq \sin\left(\tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}|K_i|\right). \tag{41}$$

(40) und (41) ergeben (19). Der Zusatz über das Eintreten des Gleichheitszeichens folgt daraus, daß $G_i = K_i$ für Gleichheit notwendig ist und aus dem am Ende des Beweises von Hilfssatz 3 Gesagten.

Beweis der Sätze 3 und 4. Aus (12) und (10) oder (14) und (11) folgt, daß $|\bar{S}| \geqq 4$ ist, woraus die Behauptung leicht folgt. (Vgl. [2] oder K. Reinhardt [3]). Die Aussage bezüglich des Gleichheitszeichens ist ein bekanntes Resultat über die kritische Determinante des Kreises.

Literatur

[1] Fejes Toth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 65. Berlin 1953.

[2] Corput, J. G. van der, and H. Davenport: On Minkowski's fundamental theorem in the geometry of numbers. Nederl. Akad. Wet., Proc. **49**, 701—707 (1946).

[3] Reinhardt, K.: Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven. Abh. Math. Sem. Hansische Univ. **10**, 216—230 (1934).

Dept. of Math., Oregon State University, Corvallis, Oregon (U.S.A.)

(Eingegangen am 30. August 1960)

Rieger, G. J.
Math. Zeitschr. 76, 226–234 (1961)

Über die Anzahl der Produktzerlegungen ganzer Zahlen

Von
G. J. Rieger

Es sei $R(1)=T(1)=1$; für die natürliche Zahl $n>1$ bezeichne $R(n)$ bzw. $T(n)$ die Anzahl aller Darstellungen von n als Produkt von natürlichen Zahlen >1, wobei alle Darstellungen, die aus einer bestimmten durch Änderung der Reihenfolge hervorgehen, mit dieser als identisch bzw. von dieser als verschieden angesehen werden.

§ 1. Über $R(n)$

Man kennt den

Satz (von Szekeres und Turán). *Es ist*

$$\sum_{n\leqq x} R(n) = \frac{x\, e^{2\sqrt{\log x}}}{2\sqrt{\pi}\log^{\frac{3}{4}} x}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right) \quad (x\to\infty)^{1}).$$

Wir wollen hier zeigen, daß sich für einen beliebig gegebenen Modul $k\geqq 1$ die Werte von $R(n)$ mit $(n,k)=1$ im Mittel gleichmäßig auf die $\varphi(k)$ primen Restklassen mod k verteilen (Satz 3).

Es bezeichne χ einen beliebigen Charakter mod k; $s=\sigma+it$; die Reihen

$$L(s,\chi) \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^{-s}\ ^{2})$$

und

$$\psi(s,\chi) \doteq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{L(m\,s,\chi^m)-1}{m}$$

sind sicherlich konvergent für $\sigma>1$; $E(\chi)$ bedeute 1 für $\chi=\chi_0$ (Hauptcharakter) und 0 für $\chi\neq\chi_0$.

Hilfssatz 1. *Für $\sigma>1$ ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, R(n)\, n^{-s} = e^{\psi(s,\chi)}.$$

Beweis. Für $\sigma>1$ ist einerseits

$$\begin{aligned} P(s,\chi) &\doteq \prod_{r=2}^{\infty}\left(1-\chi(r)\, r^{-s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{r=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\chi(r^m)\, r^{-m\,s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} R(n)\,\chi(n)\, n^{-s}, \end{aligned}$$

[1]) Wir beschränken uns auf zwei Glieder der in [7] gegebenen Entwicklung.
[2]) $\doteq$ bedeutet $=$ per definitionem.

für $\sigma>1$ ist andererseits

$$\log P(s,\chi) = -\sum_{r=2}^{\infty} \log\left(1-\chi(r)\,r^{-s}\right)$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(r^m)}{m}\, r^{-ms}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{r=2}^{\infty} \chi^m(r)\, r^{-ms}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(L(ms,\chi^m)-1\right),$$

was zu zeigen war.

Hilfssatz 2. *Für $\sigma>\frac{1}{2}$ ist*

$$g(s,\chi) = \psi(s,\chi) - \frac{E(\chi)\,\varphi(k)}{k(s-1)} \tag{1}$$

regulär.

Beweis. Die Glieder der Reihe

$$g(s,\chi) = \frac{1}{1}\left(L(s,\chi) - \frac{E(\chi)\,\varphi(k)}{k(s-1)} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(L(2s,\chi^2)-1\right) + \cdots$$

sind regulär für $\sigma>\frac{1}{2}$; wegen

$$\frac{1}{m}\left|L(ms,\chi^m)-1\right| < \sum_{n=2}^{\infty} n^{-m/2} \quad (m \geqq 4)$$

und wegen

$$\sum_{m=4}^{\infty}\sum_{n=2}^{N} n^{-m/2} < 2\left(\sum_{n=2}^{N} n^{-2} + \sum_{n=2}^{N} n^{-3} + \cdots\right)$$

$$= 2\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$< 2$$

ist die Reihe selbst dort gleichmäßig konvergent, woraus die Behauptung folgt.

Eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 2 ist

Hilfssatz 3. *Für $r<\frac{1}{2}$ ist*

$$\frac{e^{g(1+re^{i\vartheta},\chi)}}{(1+re^{i\vartheta})^2} = e^{g(1,\chi)}\left(1+O(r)\right) \qquad (r\to 0).$$

Hilfssatz 4. *Es ist*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-4y\sin^2\frac{\vartheta}{2}+i\vartheta}\,d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(1+O\left(\frac{1}{y}\right)\right) \qquad (y\to\infty).$$

BEWEIS. Es ist

$$J \doteq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-4y\sin^2\frac{\vartheta}{2}+i\vartheta}\,d\vartheta$$
$$= 2\int_{0}^{\pi/2} e^{-4y\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta$$
$$= \frac{2}{\sqrt{y}}\int_{0}^{\sqrt{2y}} e^{-u^2}\cdot\cos 2\arcsin\frac{u}{2\sqrt{y}}\cdot\left(1-\frac{u^2}{4y}\right)^{-\frac{1}{2}}du$$

vermöge

$$u = 2\sqrt{y}\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Wegen $0\leqq u\leqq\sqrt{2y}$ und daher $\frac{u^2}{4y}\leqq\frac{1}{2}$ kann man im Integranden nach Potenzen von $\frac{u^2}{4y}$ entwickeln und findet, wenn man noch

$$\int_{\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-u^2}\left(1+O\left(\frac{u^2}{y}\right)\right)du = \int_{\sqrt{2y}}^{\infty} O\left(e^{-u}\right)du$$
$$= O\left(e^{-\sqrt{2y}}\right)$$

beachtet,

$$J = \frac{2}{\sqrt{y}}\int_{0}^{\sqrt{2y}} e^{-u^2}\left(1+O\left(\frac{u^2}{y}\right)\right)du$$
$$= \frac{2}{\sqrt{y}}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\left(1+O\left(\frac{u^2}{y}\right)\right)du + O\left(e^{-\sqrt{2y}}\right),$$

woraus wegen

$$\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

die Behauptung folgt.

SATZ 1. *Es ist*

$$\sum_{n\leqq x}\chi(n)\,R(n)\log\frac{x}{n} = A_k\,x\,(\log x)^{-\frac{3}{4}}\,e^{2\sqrt{\frac{\varphi(k)\log x}{k}}}\left(E(\chi)+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\qquad(x\to\infty)$$

mit

$$A_k = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\varphi(k)}{k}\right)^{\frac{1}{4}}e^{g(1,\chi_0)}$$

und mit einer nur von k abhängigen Konstanten im Restglied.

BEWEIS. Wegen Hilfssatz 1 ist nach einer geläufigen Formel[3])

$$\sum_{n\leqq x}\chi(n)\,R(n)\log\frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s}{s^2}\,e^{\psi(s,\chi)}\,ds.$$

[3]) Vgl. etwa [6], 268.

Auf Grund der (mit Hilfe der Weylschen Methode erzielbaren) Abschätzung

$$L(1+it,\chi) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) \qquad (t\to\infty) \tag{2}$$

läßt sich unter Benutzung des Phragmén-Lindelöfschen Satzes der Integrationsweg von $\sigma=2$ nach $\sigma=1$ verlagern[4]), wobei der Punkt $s=1$ durch einen geeigneten Halbkreis auszuschließen ist, und man erhält

$$2\pi i \sum_{n\leqq x} \chi(n)\, R(n) \log\frac{x}{n} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \qquad (x>e),$$

$$J_1 = i\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^{1+it}}{(1+it)^2}\, e^{\psi(1+it,\chi)}\, dt,$$

$$J_2 = i\int_{-1}^{-\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}}} \frac{x^{1+it}}{(1+it)^2}\, e^{\psi(1+it,\chi)}\, dt,$$

$$J_3 = \int_{\mathfrak{C}} \frac{x^s}{s^2}\, e^{\psi(s,\chi)}\, ds,$$

$$J_4 = i\int_{\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}}}^{1} \frac{x^{1+it}}{(1+it)^2}\, e^{\psi(1+it,\chi)}\, dt,$$

$$J_5 = i\int_{1}^{\infty} \frac{x^{1+it}}{(1+it)^2}\, e^{\psi(1+it,\chi)}\, dt;$$

dabei bedeutet $\mathfrak{C}$ den Halbkreis

$$s = 1 + \sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}}\, e^{i\vartheta} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\vartheta\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen Hilfssatz 2 ist

$$|J_2| = |J_4| = \left| x\int_{\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}}}^{1} \frac{x^{it}}{(1+it)^2}\, e^{\frac{E(\chi)\varphi(k)}{kit}+g(1+it,\chi)}\, dt \right| = x\,O(1) \qquad (x\to\infty).$$

Wegen Hilfssatz 2 ist

$$|\psi(s,\chi) - L(s,\chi)| = O(1) \qquad (\sigma\geqq 1;\ t\to\infty);$$

wegen (2) folgt daraus

$$|e^{\psi(1+it,\chi)}| = |e^{\psi(1+it,\chi)-L(1+it,\chi)}|\,|e^{L(1+it,\chi)}| = O(1)\,O\left(\sqrt{t}\right);$$

[4]) Vgl. auch [7], § 4.

daher ist

$$|J_1| = |J_5| < x \int_1^\infty \frac{1}{t^2} O(\sqrt{t})\, dt$$

$$= O(x) \qquad (x \to \infty).$$

Insgesamt haben wir damit gefunden:

$$\sum_{n \leqq x} \chi(n) R(n) \log \frac{x}{n} = \frac{J_3}{2\pi i} + O(x) \qquad (x \to \infty).$$

Im Falle $\chi = \chi_0$ ist wegen Hilfssatz 2

$$J_3 = i x \sqrt{\frac{\varphi(k)}{k \log x}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\sqrt{\frac{\varphi(k)\log x}{k}} \cos\vartheta + i\vartheta} e^{g\left(1+\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}} e^{i\vartheta}, \chi_0\right)} \left(1+\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}} e^{i\vartheta}\right)^{-2} d\vartheta;$$

wegen $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta/2$, Hilfssatz 3 und Hilfssatz 4 folgt daraus die Behauptung für $\chi = \chi_0$. Im Falle $\chi \neq \chi_0$ ist wegen Hilfssatz 2

$$J_3 = i x \sqrt{\frac{\varphi(k)}{k \log x}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sqrt{\frac{\varphi(k)\log x}{k}} e^{i\vartheta}} e^{g\left(1+\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}} e^{i\vartheta}, \chi\right)} \left(1+\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k\log x}} e^{i\vartheta}\right)^{-2} d\vartheta$$

$$= i x \sqrt{\frac{\varphi(k)}{k \log x}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} O\left(e^{\sqrt{\frac{\varphi(k)\log x}{k}}}\right) O(1)\, d\vartheta;$$

daraus folgt die Behauptung für $\chi \neq \chi_0$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Mit Hilfe von

$$\sum_{\chi} \chi(n) \bar{\chi}(l) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } n \equiv l \bmod k, \\ 0 & \text{für } n \not\equiv l \bmod k \end{cases} \qquad ((l,k) = 1) \tag{3}$$

folgt aus Satz 1 sofort

SATZ 2. *Für* $(l, k) = 1$ *ist*

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} R(n) \log \frac{x}{n} = B_k\, x\, (\log x)^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{\frac{\varphi(k)\log x}{k}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right) \qquad (x \to \infty)$$

mit

$$B_k = \frac{A_k}{\varphi(k)}$$

und mit einer nur von k *abhängigen Konstanten im Restglied.*

Man verifiziert sofort

HILFSSATZ 5. *Für* $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und* $\lambda > 0$ *gilt*

$$\sum_{n \leqq x} a_n \log \frac{x}{n} - \sum_{n \leqq \frac{x}{1+\lambda}} a_n \log \frac{x}{n(1+\lambda)} \leqq \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} a_n \leqq$$

$$\leqq \sum_{n \leqq x(1+\lambda)} a_n \log \frac{x(1+\lambda)}{n} - \sum_{n \leqq x} a_n \log \frac{x}{n}.$$

Die Anwendung von Hilfssatz 5 mit

$$a_n = \begin{cases} R(n) & \text{für } n \equiv l \bmod k, \\ 0 & \text{für } n \not\equiv l \bmod k \end{cases}$$

und

$$\lambda = \log^{-\frac{1}{4}} x$$

liefert wegen Satz 5 nach leichter Rechnung[5])

Satz 3. *Für* $(l, k) = 1$ *gilt*

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \bmod k}} R(n) = B_k\, x (\log x)^{-\frac{3}{4}} e^{2\sqrt{\frac{\varphi(k) \log x}{k}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right) \qquad (x \to \infty)$$

mit einer nur von k *abhängigen Konstanten im Restglied.*

Es ist nicht schwer, nach dem Vorbild von [7] weitere Glieder der Entwicklungen in den bewiesenen Sätzen anzugeben. Der Satz von Szekeres und Turán ist der Spezialfall $k = 1$ von Satz 3.

§ 2. Über $T(n)$

Es sei P eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von nicht im Modul k aufgehenden Primzahlen[6]) mit den Eigenschaften:

(A) P enthält mindestens zwei Primzahlen p_1 und p_2,

(B) aus $\chi(p) = 1$ für alle $p \in P$ folgt $\chi = \chi_0$.

Die Menge Q enthalte außer 1 genau alle natürlichen Zahlen, in denen nur Primzahlen aus P aufgehen. Die Reihe

$$L(s, \chi_0, P) \doteq \sum_{n \in Q} n^{-s}$$

hat eine Konvergenzabszisse $\sigma_0(P)$ mit $0 \leqq \sigma_0(P) \leqq 1$. Die Funktionen

$$L(s, \chi, P) \doteq \sum_{n \in Q} \chi(n)\, n^{-s} \tag{4}$$

sind sicherlich für $\sigma > \sigma_0(P)$ erklärt und regulär, und es gilt dort

$$L(s, \chi, P) = \prod_{p \in P} (1 - \chi(p)\, p^{-s})^{-1}. \tag{5}$$

Die Eigenschaft (B) läßt sich auch so ausdrücken:

(B′) aus $L(s, \chi, P) = L(s, \chi_0, P)$ folgt $\chi = \chi_0$.

Denn: einerseits folgt aus $\chi(p) = 1$ für alle $p \in P$ sofort $L(s, \chi, P) = L(s, \chi_0, P)$ wegen (5); andererseits folgt aus $L(s, \chi, P) = L(s, \chi_0, P)$ zunächst $\Re L(\sigma, \chi, P) = L(\sigma, \chi_0, P)$ und daraus wegen

$$\chi(n)\, n^{-\sigma - it} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n^{-\sigma} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \chi(n) = n^{it}, \\ \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

mit $t = 0$ und wegen (4) sofort $\chi(n) = 1$ für alle $n \in Q$, insbesondere für alle $p \in P$.

[5]) Vgl. auch [7], 152—153.

[6]) In k aufgehende Primzahlen wären auf das folgende ohne Einfluß.

Im Falle $k>2$ ist (B) sicherlich dann nicht erfüllt, wenn P nur Primzahlen $\equiv 1 \bmod k$ enthält; (B) ist sicherlich dann erfüllt, wenn in P alle primen Restklassen mod k vertreten sind.

Für eine beliebige natürliche Zahl m bezeichne $T_m(n)$ die Anzahl aller Darstellungen der natürlichen Zahl $n>1$ als Produkt von m natürlichen Zahlen >1 mit Berücksichtigung der Reihenfolge; $T_0(n) \doteq 0$ für $n>1$; $T_m(1) \doteq 0$ für $m>0$, $T_0(1) \doteq 1$. Mit dieser Festsetzung gilt für $m \geqq 0$ offenbar

$$(7) \qquad \big(L(s,\chi,P)-1\big)^m = \sum_{n \in Q} \chi(n)\, T_m(n)\, n^{-s} \qquad \big(\sigma > \sigma_0(P)\big).$$

Über P setzen wir jetzt noch voraus:

es existiert eine reelle Zahl $\varrho \doteq \varrho(P) > \sigma_0(P)$ mit

$$(C) \qquad L(\sigma, \chi_0, P) \begin{cases} = 2 & \text{für} \quad \sigma = \varrho(P), \\ < 2 & \text{für} \quad \sigma > \varrho(P). \end{cases}$$

Die Eigenschaft (C) ist sicherlich dann erfüllt, wenn P nur endlich viele Primzahlen oder alle nicht in k aufgehenden Primzahlen enthält. Für $\sigma > \varrho(P)$ ist

$$|L(s,\chi,P)-1| \leqq L(\sigma,\chi_0,P) - 1 < 1.$$

Summieren wir daher (7) über m, so folgt wegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m(n) = T(n)$$

sofort

$$f(s,\chi,P) \doteq \frac{1}{2 - L(s,\chi,P)} = \sum_{n \in Q} \chi(n)\, T(n)\, n^{-s} \qquad \big(\sigma > \varrho(P)\big).$$

Wegen (3) folgt daraus

HILFSSATZ 6. *Für $(l,k)=1$ und $\sigma > \varrho(P)$ gilt*

$$(8) \qquad \sum_{\chi} \bar{\chi}(l)\, f(s,\chi,P) = \varphi(k) \sum_{\substack{n \in Q \\ n \equiv l \bmod k}} T(n)\, n^{-s}.$$

Die Funktionen $f(s,\chi,P)$ sind regulär für $\sigma > \varrho(P)$; für $\sigma = \varrho(P)$ gilt

HILFSSATZ 7. *Die Funktionen $f(\varrho+it,\chi,P)$ $(\chi \neq \chi_0)$ sind stetige Funktionen von t; $f(\varrho+it,\chi_0,P)$ ist bis auf den einfachen Pol für $t=0$ mit dem Residuum $-\big(L'(\varrho,\chi_0,P)\big)^{-1}$ eine stetige Funktion von t*[7].

BEWEIS. Es ist die Gleichung

$$L(\varrho+it,\chi,P) = 2$$

oder, was dafür notwendig ist,

$$(9) \qquad \Re\, L(\varrho+it,\chi,P) = L(\varrho,\chi_0,P)$$

[7]) Offenbar ist $L'(\varrho(P),\chi_0,P) < 0$.

zu untersuchen. Nun ist

$$\chi(n) = e^{\frac{2\pi i a}{\varphi(k)}} \tag{10}$$

mit ganzrationalem $a = a(n, \chi)$. Wegen (6) mit $\sigma = \varrho$ folgen aus (9) bei festem χ für t die unendlich vielen simultanen Bedingungsgleichungen

$$\chi(n) = n^{it}$$

für alle $n \in Q$ oder wegen (10)

$$t = \frac{\alpha}{\log n} \qquad (\alpha \text{ rational}),$$

also wegen (A) insbesondere

$$t = \frac{\alpha_1}{\log p_1} = \frac{\alpha_2}{\log p_2} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ rational}),$$

was nur für $t = 0$ möglich ist. Für $t = 0$, $\chi \neq \chi_0$ ist aber (9) unmöglich wegen (B) und (6). Die Funktion $f(\varrho + it, \chi, P)$ ist also höchstens unstetig für $t = 0$, $\chi = \chi_0$; in diesem Falle liegt offenbar ein einfacher Pol vor mit dem behaupteten Residuum, womit Hilfssatz 7 bewiesen ist.

Wegen Hilfssatz 7 ist der Taubersatz von Wiener und Ikehara auf (9) anwendbar und liefert

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen* (A), (B), (C) *über* P *gilt für* $(l, k) = 1$ *die Beziehung*

$$\sum_{\substack{n \equiv l \bmod k \\ n \in Q,\, n \leqq x}} T(n) = -\frac{(1 + o(1))\, x^{\varrho(P)}}{\varphi(k)\, \varrho(P)\, L'(\varrho(P), \chi_0, P)} \qquad (x \to \infty).$$

Die Werte von $T(n)$ mit $n \in Q$ verteilen sich also im Mittel gleichmäßig auf die $\varphi(k)$ primen Restklassen mod k. Für $k = 1$ liefert Satz 3 einen Satz von Hille[8]; im Spezialfall $k = 1$, $P = P_0$ (Menge *aller* Primzahlen) kennt man die Ergebnisse von Kalmár[9]) und Ikehara[10]) mit verschiedenen Restgliedern.

Satz 4 kann auf arithmetische Halbgruppen verallgemeinert werden. Wir begnügen uns jedoch mit der Menge aller ganzen Ideale eines algebraischen Zahlkörpers K. Dazu sei $\mathfrak{f}$ ein beliebiges ganzes Ideal von K; die zur Einteilung aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale in (engste) Idealklassen $\mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}$ gehörigen Charaktere bezeichnen wir mit χ, insbesondere mit χ_0 den Hauptcharakter; $h(\mathfrak{f})$ bedeute die Klassenzahl. Es sei $\mathfrak{P}$ eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von nicht in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primidealen mit den entsprechenden Eigenschaften (A)[11]), (B), (C); die Menge $\mathfrak{Q}$ enthalte außer dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ genau alle ganzen Ideale von K, in denen nur Primideale von $\mathfrak{P}$ aufgehen; dabei ist

$$L(s, \chi, \mathfrak{P}) \doteq \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{Q}} \chi(\mathfrak{a})\, N\mathfrak{a}^{-s}$$

---

[8]) Vgl. neben [3] auch [1] und [2], insbesondere das Addendum von Hille in [2].
[9]) Vgl. [5].
[10]) Vgl. [4].
[11]) $\mathfrak{P}$ enthält mindestens zwei Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ mit $N\mathfrak{p}_1 \neq N\mathfrak{p}_2$.

für $\sigma > \sigma_0(\mathfrak{P})$, wo $N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$ und $\sigma_0(\mathfrak{P})$ die Konvergenzabszisse von $L(s, \chi_0, \mathfrak{P})$ bedeutet; es ist $0 \leqq \sigma_0(\mathfrak{P}) \leqq 1$. Für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ bezeichne $T(\mathfrak{a})$ die Anzahl aller Darstellungen von $\mathfrak{a}$ als Produkt von ganzen Idealen $\neq \mathfrak{o}$ mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Faktoren; $T(\mathfrak{o}) \doteq 1$. Der Beweis von Satz 4 überträgt sich auf den vorliegenden Fall und liefert

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen* (A), (B), (C) *über* $\mathfrak{P}$ *gilt in jedem algebraischen Zahlkörper* K *die Beziehung*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{H} \bmod f \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{D},\, N\mathfrak{a} \leqq x}} T(\mathfrak{a}) = - \frac{(1 + o(1))\, x^{\varrho(\mathfrak{P})}}{h(f)\, \varrho(\mathfrak{P})\, L'(\varrho(\mathfrak{P}), \chi_0, \mathfrak{P})} \qquad (x \to \infty).$$

Die Abhängigkeit des Fehlergliedes vom Modul in den Sätzen soll nicht weiter untersucht werden.

Zu einer interessanten Verallgemeinerung der behandelten Fragestellungen gelangt man, wenn man an Stelle von $R(n)$ und $T(n)$ die Funktionen $R(n, y)$ und $T(n, y)$ verwendet; dabei bezeichne $R(n, y)$ bzw. $T(n, y)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl $n > 1$ als Produkt von natürlichen Zahlen a mit $1 < a \leqq y$, wobei alle Darstellungen, die aus einer bestimmten durch Änderung der Reihenfolge hervorgehen, mit dieser als identisch bzw. von dieser als verschieden angesehen werden; $y = y(n)$ ist hier eine geeignete positivwertige Funktion von n. Auch darauf gehen wir hier nicht ein.

Literatur

[1] Erdös, P.: On some asymptotic formulas in the theory of the "factorisatio numerorum". Ann. Math. (2) **42**, 989–993 (1941).

[2] Erdös, P.: Corrections to two of my papers. Ann. Math. (2) **44**, 647–651 (1943).

[3] Hille, E.: A problem in "factorisatio numerorum". Acta Arithm. **2**, 134–144 (1937).

[4] Ikehara, S.: On Kalmár's problem in „factorisatio numerorum". Proc. phys.-math. Soc. Jap. (3) **21**, 208–219 (1939).

[5] Kalmár, L.: Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen. 1. Mitteilung. Acta Litt. Sci. Szeged **5**, 95–107 (1930–1932).

[6] Landau, E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. New York 1953.

[7] Szekeres, G., u. P. Turán: Über das zweite Hauptproblem der "factorisatio numerorum". Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 143–154 (1932–1934).

Department of Mathematics and Statistics, Purdue University, Lafayette, Indiana, USA.

(Eingegangen am 30. September 1960).

Heaton, R.
Math. Zeitschr. 76, 235—239 (1961)

A Note on Polynomial Cocycles

By
Robert Heaton

1. Introduction. Polynomial cocycles and coboundaries over a field K are defined in [4]. The definition is analogous to that given by Eilenberg and MacLane in the case of abstract groups, see [1], where the variables in the coboundary formula are taken instead to be indeterminates. As expected a polynomial coboundary is a cocycle. In fact, when the characteristic of K is zero, it is shown in [4] that the only polynomial n-cocycles with $n>1$ are coboundaries. On the other hand, if K is of characteristic p, the situation is much more complicated, and for any positive integer n there are polynomial n-cocycles which are not coboundaries. The complete structure of polynomial 1, 2, and 3-cocycles for characteristic p, is given in [3] and [4], but the general dimensional problem remains unresolved. This paper is intended to show that if certain rather strong restrictions be placed on the size of the degrees of only the first two indeterminates then a polynomial n-cocycle is merely a coboundary. These restrictions are that the degree be less than p in the first indeterminate and less than $p-1$ in the second.

There is a close connection between polynomial cocycles and the n'th cohomology group $H^n(\pi, G)$ where π is a finite abelian group of exponent p (see [6], pp. 104 and 105) and G is any subgroup of π upon which π is taken to operate simply. Since π is isomorphic to the additive group $GF(p^r)^+$ of a Galois field of order p^r for some r and similarly for G, we can consider that π and G are additive groups of Galois fields, one being an algebraic extension of the other. It is easy to show that the functions on n variables of a Galois field into itself are polynomials over the field. Therefore, knowing the structure of the polynomial cocycles, gives us explicitly representatives of the cosets of $Z^n(\pi, G)$ with respect to $B^n(\pi, G)$, these being respectively the group of n-cocycles and n-coboundaries of π over G.

2. Preliminaries. If R is a ring with an identity, let D be a endomorphism of the additive group of the ring of polynomials in n-indeterminates over R given by

$$Df(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1+1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Let $\delta f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ denote the coboundary of the polynomial $f(x_1, \ldots, x_n)$. Then by a straight forward computation we obtain:

Proposition 1.

$$D(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \delta(Df)(x_1, \ldots, x_{n+1}) - Df(x_2, \ldots, x_{n+1}). \tag{2}$$

We shall say that a polynomial is *normalized* in a certain indeterminate if the polynomial is zero whenever zero is substituted for that indeterminate.

PROPOSITION 2. *If K is a field of characteristic p and m an integer with $0 \leqq m \leqq p-2$, then there is a normalized polynomial $\psi_m(x)$ over K such that $D\psi_m(x) = x^m$.*

PROOF. Let $\psi_0(x) = x$. Clearly $\psi_0(x)$ satisfies the conclusion for $m=0$. Suppose the proposition true for all integers i of K with $0 < i < m \leqq p-2$. Now

$$D x^{m+1} = (m+1)\, x^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m+1}{\nu} x^\nu .$$

By the inductive assumption, there are normalized polynomials $\psi_\nu(x)$ over K with $D\psi_\nu(x) = x^\nu$, $0 \leqq \nu \leqq m-1$. Then

$$x^m = D\left[\frac{1}{m+1}\left(x^{m+1} - \sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{m+1}{\nu}\psi_\nu(x)\right)\right],$$

and we let $\psi_m(x)$ be the polynomial in brackets.

At a suggestion of Professor WHAPLES, a formula due to LYNDON, see [5], p. 732, formula 5a, was useful in developing the following:

PROPOSITION 3. *Let K be a field of characteristic p and f a polynomial $(n+1)$-cocycle over K, normalized in the first two indeterminates, of degree less than p in the first and less than $p-1$ in the second. Further let g be a polynomial in n indeterminates over K, normalized and of degree less than p in the first indeterminate and such that*

$$Dg(x_1, \ldots, x_n) = -f(1, x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Then f is the coboundary of g.

PROOF. From (3) it follows that

$$g(1, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) = -f(1, 0, x_2, \ldots, x_n).$$

Thus by the normalization assumptions on f and g, we find that $g(1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. If c is any element of K, let $\delta g(c, x_1, \ldots, x_n)$ be the coboundary taken with c treated as variable in the expansion. Then

$$\begin{aligned}\delta g(1, x_1, \ldots, x_n) &= g(x_1, \ldots, x_n) - g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} g(1, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu + x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n) + \\ &\quad + (-1)^{n+1} g(1, x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= -Dg(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Suppose for some integer m with $1 < m \leqq p-2$

$$\delta g(m, x_1, \ldots, x_n) = f(m, x_1, \ldots, x_n). \tag{4}$$

By Proposition 1

$$\delta g(m+1, x_1, \ldots, x_n) = \delta g(m, x_1, \ldots, x_n) + \delta(Dg)(m, x_1, \ldots, x_n) - Dg(x_1, \ldots, x_n).$$

Using (3) and the inductive assumption, yields

$$\delta g(m+1, x_1, \ldots, x_n) = f(m, x_1, \ldots, x_n) + \delta(Dg)(m, x_1, \ldots, x_n) + f(1, x_1, \ldots, x_n).$$

But

$$\begin{aligned}\delta(Dg)(m, x_1, \ldots, x_n) &= Dg(x_1, \ldots, x_n) - Dg(m + x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} Dg(m, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu + \\ &\quad + x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n) + (-1)^{n+1} Dg(m, x_1, \ldots, x_n) \\ &= -f(1, x_1, \ldots, x_n) + \delta f(1, m, x_1, \ldots, x_n) + \\ &\quad + f(m+1, x_1, \ldots, x_n) - f(m, x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

f is an $(n+1)$-cocycle, so that $\delta f(1, m, x_1, \ldots, x_n) = 0$, and (4) holds with m replaced by $m+1$. Hence by induction (4) holds for all non-zero integers of K. Since f and g are normalized in the first indeterminate, (4) also holds when $m=0$. If we let

$$\begin{aligned}h(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= f(x_1, \ldots, x_{n-1}) - \delta g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{s} x_1^\nu h_\nu(x_2, \ldots, x_{n+1})\end{aligned}$$

where s is the degree in x_1, then $s \leqq p-1$ and $h(m, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ for $m = 0, 1, \ldots, p-1$. Clearly all h_ν are identically zero, and the proposition follows.

The foregoing proposition can be generalized somewhat in that it holds for polynomials over a commutative integral domain with an identity, p being taken as the additive order of the identity which may of course be infinite.

3. Results.

Theorem. *For $n \geq 2$ and K a field of characteristic p, every polynomial n-cocycle over K of degree less than p in the first indeterminate and less than $p-1$ in the second is a coboundary.*

Proof. First suppose f is a polynomial n-cocycle normalized in the first two indeterminates. Then

$$f(1, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{\nu=1}^{s} x_1^\nu g_\nu(x_2, \ldots, x_{n-1})$$

with $s \leqq p-2$. Let

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\sum_{\nu=1}^{s} \psi_\nu(x_1)\, g_\nu(x_2, \ldots, x_{n-1})$$

where the $\psi_\nu(x_1)$ are those normalized polynomials of proposition 2 with $D\psi_\nu(x_1) = x_1^\nu$. Clearly

$$Dg(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -f(1, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

and f is the coboundary of g by proposition 3.

If f is as above but not normalized in the first two indeterminates, then by the method used in proving lemma 6.1 of [1], observing that the functions used there are now polynomials, it can be shown that f is cohomologous to a polynomial n-cocycle, normalized in these first two indeterminates and of degree no larger than that of f in these indeterminates. This statement can also easily be proved directly without recourse to lemma 6.1 of [1]. The theorem clearly follows.

REMARKS. As was done in [2], the method used in the proof of the above theorem can also be used to show that over a field of characteristic zero all polynomial cocycles are coboundaries; for in characteristic zero, propositions 2 and 3 go through with no restriction on the degree. This, however, was proved by a much shorter method in [4].

In characteristic p it is not possible to relax the requirements given in the above theorem on the degree of the first two indeterminates and always expect a polynomial cocycle with the larger degrees in these indeterminates to be a coboundary. To see this, let $\varphi_p(x, y)$ be the image of the polynomial $p^{-1}\left(x^p - (x+y)^p + y^p\right)$ under the natural homomorphism of $Z[x, y]$ onto $Z/(p)[x, y]$ where Z is the ring of rational integers. Then $\varphi_p(x, y)$ is a polynomial 2-cocycle over $GF(p)$ which is of degree $p-1$ in x and y but is not a coboundary. In fact, for any even integer $n \geq 2$, the polynomial $c\varphi_p(x_1, x_2) \cdots \varphi_p(x_{n-1}, x_n)$ where c is in $GF(p)$ and all factors are of the form $\varphi_p(x_i, x_{i+1})$ is a n-cocycle which is not a coboundary. That it is a cocycle, follows from the well known coboundary formula for cup products, see (4.6) of [1], and a rather tedious argument on polynomial identities shows that it is not a coboundary. It is easy to see using (16.2) and (16.3) of [1] that these polynomials with $c = 0, 1, \ldots, p-1$ form a complete set of representatives for the cosets of $Z^n\left(GF(p)^+, GF(p)^+\right)$ with respect to $B^n\left(GF(p)^+, GF(p)^+\right)$ where $GF(p)^+$ operates simply on itself. If $n > 1$ is odd in the above, then the corresponding coset representatives are $c x_1 \varphi_p(x_2, x_3) \cdots \varphi_p(x_{n-1}, x_n)$ where all factors after the first are $\varphi_p(x_i, x_{i-1})$. Again these polynomial cocycles are not coboundaries when $c \neq 0$. Also it can be shown that $x_1^p x_2^{pr_2} x_3^{pr_3} \cdots x_n^{pr_n}$, $r_i \neq r_j$ and $r_i \neq 1$, is a polynomial n-cocycle of degree p in x_1 which is not a coboundary.

There are other examples similar to those just given. In fact, if we have a polynomial which is the product of the additive polynomials $x_i^{p^{r_i}}$ with $r_i \neq r_j$ when $i \neq j$ and the special polynomial 2-cocycles $\varphi_p(x_k, x_{k+1})^{p^{s_k}}$, then it is a cocycle but not a coboundary. For example, $x_1^{p^q} \varphi_p(x_2, x_3)^{p^r} x_4^{p^s} \varphi_p(x_5, x_6)^{p^t}$ where $q \neq s$ is a polynomial 6-cocycle which is not a coboundary. One could conjecture that if $n > 2$ all polynomial n-cocycles which are not coboundaries are composed of a coboundary and a linear combination over the field of these special products. The main result of [3] shows that this statement is true at least when $n = 3$. The requirement that $q \neq s$ in the above 6-cocycle is necessary in order that it not be a coboundary when $p \neq 2$. For suppose $q = s$ and $p \neq 2$. From proposition 2 of [3], $x_1^{p^s} \varphi_p(x_3, x_4)^{p^r} - \varphi_p(x_2, x_3)^{p^r} x_4^{p^s}$

is a coboundary, and it follows that the above example with $q = s$ is cohomologous to $x_1^{p^s} x_2^{p^s} \varphi_p(x_3, x_4)^{p^r} \varphi_p(x_5, x_6)^{p^t}$. But it is easy to check that this is the coboundary of $\frac{1}{2} x_1^{2p^s} \varphi_p(x_2, x_3)^{p^r} \varphi_p(x_4, x_5)^{p^t}$.

References

[1] Eilenberg, S., and S. MacLane: Cohomology Theory in Abstract Groups. I. Ann. Math. **48**, 51—78 (1947).

[2] Heaton, R.: Polynomial Cocycles. Doctoral Diss., Indiana University 1955.

[3] Heaton, R.: Polynomial 3-Cocycles over Fields of Characteristic p. Duke Math. J. **26**, 269—275 (1959).

[4] Heaton, R., and G. Whaples: Polynomial Cocycles. Duke Math. J. **25**, 691—696 (1958).

[5] Lyndon, R.: New Proof for a Theorem of Eilenberg and MacLane. Ann. Math. **50**, 731—735 (1949).

[6] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937.

Rutgers University, New Brunswick, New Jersey (U.S.A.)

(Eingegangen am 13. Oktober 1960)

André, J.
Math. Zeitschr. 76, 240—256 (1961)

Über Parallelstrukturen*)

Teil III: Zentrale t-Strukturen[1])

Von
Johannes André

Einleitung

Eine affine Parallelstruktur (a.P.) heißt *zentral*, wenn jede ihrer Translationen zentral ist, d.h. mit einer Geraden auch alle zu ihr parallelen festläßt. Das braucht, wie in II, §2 an Beispielen gezeigt wurde, bei Parallelstrukturen — im Gegensatz zu Ebenen — keineswegs immer der Fall zu sein (nicht einmal bei transitiver Translationsgruppe), muß vielmehr zusätzlich gefordert werden. Eine *zentrale t-Struktur* oder kurz *t-Struktur* ist eine zentrale a.P. mit „genügend vielen" Translationen, genauer wird die Existenz nichtidentischer Translationen in mindestens zwei verschiedenen Richtungen gefordert. Eine t-Ebene [s. André (1958, a)] ist eine t-Struktur, die zugleich affine Ebene ist.

Die Translationsgruppe einer t-Struktur ist abelsch. Jedes ihrer Transitivitätsgebiete (d.h. jedes Gebiet, das aus einem ihrer Punkte durch Anwendung aller Translationen entsteht) läßt sich in natürlicher Weise als eine zentrale Translationsstruktur (z.T.; vgl. II, §2) auffassen, indem man als Geraden die aus mindestens zwei Punkten bestehenden Schnitte der Geraden unserer t-Struktur mit dem fraglichen Transitivitätsgebiet nimmt (s. §2). Alle die so gewonnenen t-Strukturen sind paarweise isomorph (Satz 2.3). Man kann auf diese Weise jeder t-Struktur $\mathfrak{p}$ eindeutig eine z.T. mit derselben Translationsgruppe wie $\mathfrak{p}$ zuordnen, die man den *Stamm* von $\mathfrak{p}$ nennt.

Es liegt jetzt nahe, t-Strukturen mit vorgegebenem Stamm zu konstruieren; das läuft im wesentlichen auf die Konstruktion einer t-Struktur mit gegebener Translationsgruppe hinaus. Anders gewendet heißt das, eine vorgegebene z.T. so zu erweitern, daß die Translationsgruppe dabei erhalten bleibt (translationstreue Erweiterung, vgl. I, §4). Solche Erweiterungen sind auf mannigfache Weise möglich. Man kann sogar eine beliebige z.T. translationstreu in eine affine Ebene einbetten (die dann notwendig eine t-Ebene ist), wie dies in den §§ 3, 4 und 5 näher ausgeführt wird. Die fragliche Konstruktion geschieht durch eine Art „freie Erweiterung" der z.T., die an ein Verfahren von M. Hall (1943) zur Konstruktion freier Ebenen angelehnt ist. Die einzelnen Konstruktionsschritte sind hier aber komplizierter als bei Hall, denn es muß

*) Teil einer von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift.

[1]) Teil I, Math. Z. **76**, 85—102, Teil II, Math. Z. **76**, 155—163 (1961), im folgenden hier mit I bzw. II zitiert.

ja darauf geachtet werden, daß die Translationsgruppe bei den Erweiterungsschritten sich nicht ändert. In der zweiten Hälfte des § 3 wird diese „freie translationstreue Erweiterung" kurz skizziert, in § 4 ausführlich begründet, während wir in § 5 schließlich zeigen, daß die so erhaltene „freie translationstreue Erweiterungsebene" tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften hat (insbesondere auch die gegebene Gruppe zur Translationsgruppe). Wir haben damit, grob gesagt, gezeigt, daß es zu einer vorgegebenen abelschen Translationsgruppe stets affine Ebenen mit dieser Gruppe gibt[2]). Im letzten Paragraphen endlich werden noch die Streckungen dieser freien Erweiterungsebene untersucht. Es zeigt sich, daß auch sie mit denjenigen ihres Stammes übereinstimmen.

§ 1. Grundbegriffe

1. Definition. Eine *zentrale t-Struktur* oder kurz *t-Struktur* ist eine a. P. $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(z 1) *Jede Translation τ von $\mathfrak{p}$ ist zentral, d. h.*[3]) *aus $G^\tau = G$ und $G' \| G$ $(G, G' \in \mathfrak{G})$ folgt $G'^\tau = G'$.*

(z 2) *Es gibt in $\mathfrak{p}$ (mindestens) zwei nichtparallele Geraden G_1, G_2 und nichtidentische Translationen τ_1, τ_2 derart, daß $G_i^{\tau_i} = G_i$ $(i = 1, 2)$ ist.*

Bemerkungen. Aus (z 1) folgt nach I, Satz 4.6 (b), daß die Translationen einer t-Struktur eine Gruppe bilden, die wir wieder mit T bezeichnen wollen. Axiom (z 2) besagt, daß T in gewissem Sinne „genügend reichhaltig" ist. Genauer gesagt, bedeutet (z 2): *Es gibt auf der uneigentlichen Geraden von $\mathfrak{p}$ mindestens zwei Punkte, die Zentren nichtidentischer Translationen sind.* Mithin bedeutet (z 2), daß es nichtidentische Translationen in (mindestens) zwei verschiedenen „Richtungen" gibt. Die t-Ebenen [im Sinne von André (1958, a)] kann man kennzeichnen als affine Ebenen, die zugleich t-Strukturen sind.

Seien $\tau_1, \tau_2 \neq \underline{1}$ Translationen von $\mathfrak{p}$ mit den (uneigentlichen) Zentren z_1 bzw. $z_2 \neq z_1$. Dann hat $\tau_1 \tau_2 \neq \underline{1}$ weder z_1 noch z_2 zum Zentrum, denn die Translationen mit gleichem Zentrum bilden eine Untergruppe von T. Wegen (z 1) gilt also [in Verschärfung von (z 2)]:

Satz 1.1. *Auf der uneigentlichen Geraden einer z. P. gibt es mindestens drei verschiedene Punkte, die Zentren nichtidentischer Translationen sind*[4]).

2. Spezielle t-Strukturen sind die sog. *T-Strukturen;* sie sind durch das folgende (z 2) verschärfende zusätzliche Axiom gekennzeichnet:

[2]) Eine kurze Zusammenfassung eines Teiles dieser Ergebnisse wurde bereits in André (1958, b) gebracht.

[3]) Diese Definition einer zentralen Translation steht im Einklang mit der in I, S. 97 gebrachten. Aus (z 1) folgt nämlich für jede Translation τ die Existenz einer Geraden G mit $G^\tau = G$. O.B.d.A. können wir $\tau \neq \underline{1}$ annehmen; dann ist $G = \langle p, p^\tau \rangle$ die gewünschte Gerade; das ergibt Bedingung (a) in I. Dadurch ist G im wesentlichen eindeutig bestimmt. Genauer: Ist G' eine weitere Gerade mit $G'^\tau = G'$ (wieder $\tau \neq \underline{1}$ angenommen), so $G \| G'$. Wäre nämlich $G' \nparallel G$ und $q \in G'$, so wäre $q^\tau \notin G'$, also $G'^\tau \neq G'$. Damit ist auch Bedingung (b) bewiesen.

[4]) Die Anzahl „drei" kann allgemein nicht erhöht werden, wie das Beispiel der Ebene über dem Galoisfeld der Ordnung 2 zeigt.

(z 2') *Zu jeder Geraden G von $\mathfrak{p}$ gibt es (mindestens) eine nichtidentische Translation τ mit $G^\tau = G$.*

Mithin bedeutet (z 2'), daß es nichtidentische Translationen in jeder Richtung gibt, m.a.W., daß jeder Punkt der uneigentlichen Geraden von $\mathfrak{p}$ Zentrum einer nichtidentischen Translation ist. Spezielle T-Strukturen sind u.a. die zentralen Translationsstrukturen (vgl. II, §2). Eine genauere Untersuchung der allgemeinen T-Strukturen folgt in Teil IV.

3. Wir haben schon festgestellt, daß die Translationen einer t-Struktur eine Gruppe bilden. Wir zeigen jetzt genauer:

SATZ 1.2. *Die Gruppe der Translationen einer t-Struktur ist abelsch.*

BEWEIS. Zunächst seien τ und τ' nichtidentische Translationen mit verschiedenen Zentren; dann folgt $\tau\tau' = \tau'\tau$ aus I, Satz 4.5. Haben τ und τ' gleiche Zentren, so schließen wir die Vertauschbarkeit genau ebenso wie beim Beweis von II, Satz 2.3 mit Hilfe eines $\tau'' \neq \underline{1}$, das ein anderes Zentrum als τ hat. [Ein solches τ'' existiert nach (z 2).]

Aus der Definition von „translationstreu" (I, §4, Ziffer 5) folgt sofort:

SATZ 1.3. *Jede translationstreue Unterstruktur einer t- bzw. T-Struktur ist ebenfalls eine t- bzw. T-Struktur.*

Der folgende über Axiom (a 3) hinausgehende Reichhaltigkeitssatz wird uns später nützlich sein.

SATZ 1.4. *Zu jedem Punkt p einer t-Struktur $\mathfrak{p}$ kann man drei weitere Punkte von $\mathfrak{p}$ finden, die zusammen mit p ein nichtausgeartetes Viereck bilden (d.h. von den vier Punkten liegen keine drei auf einer Geraden).*

BEWEIS. Sei p ein beliebiger Punkt der t-Struktur $\mathfrak{p}$, ferner τ, τ' [nach (z 2) existierende] nichtidentische Translationen mit verschiedenen Zentren. Die vier Punkte p, p^τ, $p^{\tau'}$ und $p^{\tau\tau'}$ haben die gewünschte Eigenschaft, ein nichtausgeartetes Viereck zu bilden; denn p, p^τ und $p^{\tau'}$ liegen nicht auf einer Geraden, weil τ und τ' verschiedene Zentren haben. Da dann auch die Zentren von τ, $\tau\tau'$ bzw. τ', $\tau\tau'$ jeweils verschieden sind, liegen auch p, p^τ und $p^{\tau\tau'}$ bzw. p, $p^{\tau'}$, $p^{\tau\tau'}$ nicht auf einer Geraden. Schließlich gehören auch p^τ, $p^{\tau'}$ und $p^{\tau\tau'}$ nicht derselben Geraden an, denn sonst gelte dasselbe für die Punkte p, $p^{\tau'\tau^{-1}}$ und $p^{\tau'}$, die man aus den vorherigen durch Anwendung von τ^{-1} gewinnt. Aber auch τ' und $\tau'\tau^{-1}$ haben verschiedene Zentren.

ZUSATZ. *Durch jeden Punkt einer t-Struktur gehen mindestens drei Geraden.*

Schließlich gilt noch für T-Strukturen, über (a 4) hinausgehend:

SATZ 1.5. *Jede Gerade einer T-Struktur enthält mindestens zwei (eigentliche) Punkte.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ eine T-Struktur und $G \in \mathfrak{G}$. Nach (a 4) gibt es einen Punkt $p \in G$, nach (z 2') eine Translation $\tau \neq \underline{1}$ mit $G^\tau = G$. Neben p gehört auch $p^\tau \neq p$ zu G.

§ 2. Der Stamm einer t-Struktur

1. Sei $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ eine t-Struktur und T ihre Translationsgruppe. Ist T transitiv, so ist $\mathfrak{p}$ eine zentrale Translationsstruktur; wir haben sie in II behandelt. Unabhängig von jeder Transitivitätsvoraussetzung können wir aber durch $\mathfrak{p}$ auf T in folgender Weise eine Partition $\mathfrak{P}$ definieren: Sei $\mathsf{T}(G)\leqq\mathsf{T}$ die Gruppe aller G (als Ganzes) festlassenden Translationen, dann soll $\mathfrak{P}$ aus genau denjenigen Untergruppen $\mathsf{T}(G)$ bestehen, die nicht nur die Identität enthalten[5]):

$$\mathfrak{P}=\{\mathsf{T}(G)\,|\,G\in\mathfrak{G},\ \mathsf{T}(G)>\{1\}\}. \tag{2.1}$$

Da einerseits $\mathsf{T}(G)\cap\mathsf{T}(G')=\{1\}$ für $\mathsf{T}(G)\neq\mathsf{T}(G')$ (also $G\nparallel G'$) ist und es andererseits zu jedem $\tau\in\mathsf{T}$ ein $G\in\mathfrak{G}$ mit $G^{\tau}=G$ gibt (s. Fußnote 3), sind die Bedingungen für eine Partition (vgl. II, § 1) alle erfüllt. Aus T und $\mathfrak{P}$ gewinnen wir aber gemäß den Ergebnissen von II, § 1 eine Translationsstruktur $t_{\mathfrak{p}}=[\mathsf{T}, \mathfrak{P}]$ (indem wir als Punkte die Elemente von T und als Geraden die Rechtsrestklassen nach den Untergruppen von $\mathfrak{P}$ nehmen), deren Translationsgruppe zu T isomorph ist (und die wir deshalb mit T identifizieren können und wollen); sie ist zentral, weil T abelsch ist (II, Satz 2.4). Die so gewonnene durch $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmte z.T. $t_{\mathfrak{p}}$ wird als *Stamm* von $\mathfrak{p}$ bezeichnet. Statt $t_{\mathfrak{p}}$ schreiben wir häufig einfach t, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

2. Wir können aus $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ noch auf eine andere vernünftige Weise z.T. gewinnen (von denen aber gezeigt wird, daß sie zum Stamm isomorph sind). Die folgende Bemerkung soll darauf vorbereiten. Durch die Translationsgruppe T zerfällt P in (endlich oder unendlich viele) Transitivitätsgebiete $T_i=p_i^{\mathsf{T}}$ ($p_i\in T_i$; $p_i\notin T_j$ für $i\neq j$; hierbei gehören i, j einer Indexmenge I an). Also ist

$$P=\bigcup_{i\in I} T_i \tag{2.2}$$

mit paarweise fremd gelegenen T_i.

Durch $\mathfrak{p}$ werden auf den T_i in natürlicher Weise geometrische Strukturen t_i aufgeprägt: Sei $G\in\mathfrak{G}$; der Durchschnitt $G\cap T_i$ kann leer sein; ist er es nicht, so nennen wir ihn die *Spur* der Geraden G auf T_i. Die geometrische Struktur $t_i=(T_i, \mathfrak{L}_i)$ [die von $\mathfrak{p}$ auf T_i *induzierte Struktur*] definieren wir jetzt auf folgende Weise: Ihre *Punkte* sind die Elemente von T_i; ihre *Geraden* (d.h. die Elemente aus $\mathfrak{L}_i$) die aus mindestens zwei Elementen bestehenden Spuren der Geraden aus $\mathfrak{G}$ auf T_i, d.h.

$$\mathfrak{L}_i=\{G\cap T_i\,|\,G\in\mathfrak{G},\ |G\cap T_i|>1\}; \tag{2.3}$$

zwei Geraden $G\cap T_i$ und $G'\cap T_i$ nennen wir in t_i zueinander *parallel*, wenn G und G' es in $\mathfrak{p}$ sind.

Wenn wir zeigen, daß jede dieser induzierten Strukturen t_i zum Stamm von $\mathfrak{p}$ isomorph ist (d.h. eine eineindeutige, inzidenz- und parallelenerhaltende Abbildung zwischen den Punkten und Geraden von t_i und denen von $t_{\mathfrak{p}}=t$

[5]) Offensichtlich gilt $\mathsf{T}(G)=\mathsf{T}(G')$ für $\mathsf{T}(G)>\{1\}$ genau dann, wenn $G\|G'$ ist, denn $\mathfrak{p}$ ist als zentral vorausgesetzt (vgl. auch Fußnote 3).

besteht), so wissen wir damit auch, daß t_i eine z.T. ist, denn der Stamm t von $\mathfrak{p}$ war als solche erkannt.

Bevor wir dies beweisen, müssen wir noch zwei andere, auch für sich interessante und wichtige Sätze herleiten.

SATZ 2.1. *Ist $G \cap T_i \neq \emptyset$ (d.h. existiert die Spur von G auf T_i), so stimmen die Mächtigkeiten von $G \cap T_i$ und der Gruppe $\mathsf{T}(G)$ aller G festlassenden Translationen überein:* $|G \cap T_i| = |\mathsf{T}(G)|$.

BEWEIS. Sei p fest auf $G \cap T_i$ gewählt. Aus $q \in G \cap T_i$ folgt die eindeutige Existenz eines $\tau \in \mathsf{T}$ mit $p^\tau = q$, da p und q in demselben Transitivitätsgebiet T_i liegen. Dieses τ läßt G fest, d.h. $\tau \in \mathsf{T}(G)$. Umgekehrt folgt hieraus $p^\tau \in G \cap T_i$. Durch $\tau \to p^\tau$ ist eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathsf{T}(G)$ und $G \cap T_i$ hergestellt.

BEMERKUNG. Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß die Mächtigkeit von $G \cap T_i$ nicht von der speziellen Wahl von i abhängt, wenn nur $G \cap T_i$ nicht leer ist.

Ist $\mathsf{T}(G) = \{\underline{1}\}$ für ein $G \in \mathfrak{G}$, d.h. gibt es keine G festlassende nichtidentische Translation (also keine in der „Richtung" G), so ist $G \cap T_i$ leer oder ein Punkt, der *Spurpunkt* von G auf T_i. Für $\mathsf{T}(G) > \{\underline{1}\}$ ist dagegen $G \cap T_i$ leer oder besteht aus mindestens zwei Punkten. Hieraus folgt sofort:

SATZ 2.2. *Eine t-Struktur $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ ist genau dann T-Struktur, wenn für alle $G \in \mathfrak{G}$ und alle $i \in I$ entweder $G \cap T_i = \emptyset$ oder $|G \cap T_i| > 1$ gilt, d.h. wenn alle Spuren mindestens zwei Punkte enthalten.*

3. Nunmehr wollen wir eine isomorphe Abbildung vom Stamm t von $\mathfrak{p}$ auf eine induzierte Struktur t_i herstellen. Die Punkte von t sind die Translationen von $\mathfrak{p}$. Der identischen Translation $\underline{1}$ möge ein beliebiger, aber dann festgehaltener Punkt p_i von t_i zugeordnet sein. Dann vermittelt die eineindeutige Zuordnung

$$\iota_i: \quad \tau \to p_i^\tau \qquad (\tau \in \mathsf{T}) \tag{2.4}$$

den gewünschten Isomorphismus zwischen t und t_i. Die Geraden von t sind nämlich von der Gestalt $\mathsf{T}(G)\tau$ mit $\tau \in \mathsf{T}$, $G \in \mathfrak{G}$ und $\mathsf{T}(G) > \{\underline{1}\}$, wobei wir o.B.d.A. $p_i \in G$ annehmen können. [Sonst ersetze man G durch $\langle G \| p_i \rangle$, was wegen $\mathsf{T}(G) = \mathsf{T}(\langle G \| p_i \rangle)$ zulässig ist[6].] Wegen Satz 2.1 und der Geradendefinition in t ist $|G \cap T_i| = |\mathsf{T}(G)| > 1$, mithin $G \cap T_i$ eine Gerade von t_i. Durch ι_i wird die Gerade $\mathsf{T}(G)$ von t auf die Gerade $G \cap T_i$ von t_i abgebildet, also $\mathsf{T}(G)\tau$ auf $(G \cap T_i)^\tau = G^\tau \cap T_i$. Die Parallelität bleibt bei Anwendung von ι_i erhalten: Zwei Geraden $\mathsf{T}(G)\tau$ und $\mathsf{T}(G')\tau'$ $(\tau, \tau' \in \mathsf{T};\ G, G' \in \mathfrak{G};\ p_i \in G \cap G')$ aus t sind nämlich genau dann zueinander parallel, wenn $G \| G'$, mithin $G = G'$ ist. Dann folgt aber $G^\tau \| G^{\tau'}$ und somit (wegen der Definition der Parallelität in t_i) auch $G^\tau \cap T_i \| G^{\tau'} \cap T_i$. Der durch (2.4) definierte (und im wesentlichen eindeutig bestimmte[7]) Isomorphismus ι_i von t auf t_i $(i \in I)$ wird als ein *kanonischer Isomorphismus* bezeichnet.

[6] Als $\langle G \| p \rangle$ wurde in I die durch p gehende und zu G parallele Gerade definiert.

[7] Durch die Vorgabe von p_i, des Bildpunktes von $\underline{1}$, ist ι_i eindeutig bestimmt. Wird statt dessen $\underline{1}$ in $q_i = p_i^\tau$ $(\tau \in \mathsf{T})$ abgebildet, so erhalten wir $\iota_i \tau$ als zugehörigen kanonischen Isomorphismus. Bis auf Translationen ist er also eindeutig bestimmt.

Damit ist die Isomorphie zwischen t und t_i hergestellt, insbesondere auch gezeigt, daß die t_i z.T. sind. Man kann jedes t_i als Unterstruktur (im Sinne von I, §2, Ziffer 5) von $\mathfrak{p}$ auffassen, indem man $G \cap T_i$ mit G identifiziert. [Diese Identifizierung ist möglich, denn aus $G \cap T_i = G' \cap T_i$ $(G, G' \in \mathfrak{G})$ mit $|G \cap T_i| > 1$ folgt $G = G'$.] Da offensichtlich [im Sinne von (a') und (b') von I, §4, Ziffer 5] die Translationsgruppen von $\mathfrak{p}$ und t_i übereinstimmen (nämlich $= \mathsf{T}$ sind), ist t_i sogar translationstreue Unterstruktur von $\mathfrak{p}$. Da wir ferner (wegen der bewiesenen Isomorphie) jedes t_i mit dem Stamm $t_\mathfrak{p}$ identifizieren können, läßt sich jede t-Struktur auch als translationstreue Erweiterung ihres Stammes auffassen. Zusammen erhalten wir:

Satz 2.3. *Jedes Transitivitätsgebiet T_i $(i \in I)$ bezüglich der (vollen) Translationsgruppe T einer t-Struktur $\mathfrak{p}$ ist eine zentrale Translationsstruktur t_i hinsichtlich T, wenn man als Geraden von t_i die aus mindestens zwei Punkten bestehenden Spuren der Geraden von $\mathfrak{p}$ nimmt und zwei Geraden von t_i genau dann parallel nennt, wenn ihre erzeugenden Geraden aus $\mathfrak{p}$ diese Eigenschaft haben.*

Jedes dieser t_i ist zum Stamm $t_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ isomorph, insbesondere sind also die t_i auch untereinander isomorph. Schließlich ist $\mathfrak{p}$ translationstreue Erweiterung eines jeden t_i und auch des Stammes $t_\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{p}$ endlich, so auch die t_i. Aus der Isomorphie der t_i untereinander folgt insbesondere $|T_i| \mid |P|$:

Satz 2.4. *Die Anzahl der Punkte des Stammes $t_\mathfrak{p}$ einer endlichen t-Struktur $\mathfrak{p}$ ist Teiler der Anzahl der Punkte von $\mathfrak{p}$.*

4. Wir geben jetzt noch eine Übersicht über translationstreue Unterstrukturen, die Translationsstrukturen sind.

Satz 2.5. *Die translationstreuen Unterstrukturen einer t-Struktur $\mathfrak{p}$, die Translationsstrukturen sind, stimmen genau mit den von $\mathfrak{p}$ induzierten Strukturen t_i überein.*

Beweis. Jedenfalls sind die t_i nach Satz 2.3 translationstreue Unterstrukturen. Sei umgekehrt $t = (T, \mathfrak{L})$ eine in $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ translationstreu gelegene Translationsstruktur (die nach Satz 1.2 und II, Satz 2.4 zentral ist), insbesondere gilt $T \subseteq P$ und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}$. Da t translationstreu in $\mathfrak{p}$ liegt, ist $T^\tau = T$ für jede Translation τ von $\mathfrak{p}$, und umgekehrt kann jede Translation von t auf $\mathfrak{p}$ fortgesetzt werden. Somit ist T Transitivitätsgebiet hinsichtlich der Translationsgruppe T von $\mathfrak{p}$ (die mit der Translationsgruppe von t übereinstimmt); denn t war als Translationsstruktur vorausgesetzt. Es gibt also ein $i \in I$ mit $T = T_i$. Wir wollen jetzt $t = t_i$ $[= (T_i, \mathfrak{L}_i)]$ beweisen. Jedes $L \in \mathfrak{L}$ hat mit T_i mindestens zwei Punkte gemeinsam [das folgt aus Axiom (t 2)]. Die Gerade L, als Element von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt, hat also auf T_i eine aus mindestens zwei Punkten bestehende Spur, also gilt $L \in \mathfrak{L}_i$, d.h. $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_i$. Ist umgekehrt $L \in \mathfrak{L}_i$, so hat L mit T_i mindestens zwei Punkte t, t' gemeinsam. Die Gerade $\langle t, t' \rangle_t \in \mathfrak{L}$ stimmt mit L überein, also gilt auch $\mathfrak{L}_i \subseteq \mathfrak{L}$, mithin $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}$. Inzidenz und Parallelität in t zieht die in t_i nach sich und umgekehrt, also gilt $t = t_i$, w.z.b.w.

§ 3. Zentrale t-Strukturen mit vorgegebenem Stamm

Im vorigen Paragraphen haben wir gefunden, daß wir jeder t-Struktur $\mathfrak{p}$ eindeutig eine zentrale Translationsstruktur (z.T.) t, den Stamm von $\mathfrak{p}$ zuordnen können. Wir beginnen jetzt mit der Untersuchung des Umkehrproblemes: *t-Strukturen mit vorgegebenem Stamm zu konstruieren.* Sei $\mathfrak{p}$ eine t-Struktur mit dem Stamm t. Wir können, wie im vorigen Paragraphen ausgeführt wurde, $\mathfrak{p}$ als translationstreue Erweiterung von t auffassen. Umgekehrt: Ist dies der Fall, so stimmt t nach Satz 2.5 mit einer durch $\mathfrak{p}$ induzierten Translationsstruktur überein, ist also zum Stamm von $\mathfrak{p}$ isomorph. Mithin ist das Problem „Alle t-Strukturen mit vorgegebenem Stamm t zu finden" äquivalent mit der Aufgabe „Alle translationstreuen Erweiterungen einer z.T. t zu suchen, die t-Strukturen sind". Diese letztere Fragestellung kann man auch dahingehend verallgemeinern, daß die Voraussetzung, t sei eine z.T., fallengelassen wird.

In Teil IV bringen wir eine vollständige Übersicht über alle möglichen translationstreuen Erweiterungen, die T-Strukturen sind. *Beispiele* von t-Strukturen, die translationstreu über t sind, wurden bereits in I, §4, Ziffer 5 gebracht: In der Tat sind ja die dort eingeführten Strukturen $t^{(J)}$ translationstreu über t, und ist $t=(T, \mathfrak{L})$ eine z.T., so ist offensichtlich $t^{(J)}$ eine t-Struktur [dagegen sicher keine T-Struktur, denn keine der Geraden (t, j) $(t \in T, j \in J)$ bleibt bei einer nichtidentischen Translation fest.] Allerdings ist bei $t^{(J)}$ nur die Geradenmenge echt erweitert gegenüber der von t, während die Punktmengen beider Strukturen übereinstimmen.

Wir wollen in den folgenden Paragraphen zeigen, daß man zu einer beliebig vorgegebenen z.T. t auch translationstreue Erweiterungen finden kann, deren Punktmengen *echte* Erweiterungen derjenigen von t sind. [Dann gilt wegen (a 1) dasselbe auch für die Geradenmengen.] Weitergehend können wir sogar zeigen: *Jede zentrale Translationsstruktur kann translationstreu zu einer affinen Ebene erweitert werden.* Allgemeiner werden wir folgendes Problem lösen: Eine t-Struktur $\mathfrak{p}$ translationstreu in eine affine Ebene einzubetten. Eine solche Ebene können wir aus $\mathfrak{p}$ schrittweise durch eine „freie translationstreue Erweiterung[8])" von $\mathfrak{p}$ gewinnen, wie in den folgenden Paragraphen näher ausgeführt wird. Wir können hierzu natürlich annehmen, daß $\mathfrak{p}$ keine affine Ebene ist, also windschiefe Geraden (vgl. I, §2, Ziffer 2) enthält. Wir ordnen zunächst je zwei solchen Geraden einen neuen Schnittpunkt zu und erweitern $\mathfrak{p}$ auf diese Weise zu einer Inzidenzstruktur $\hat{\mathfrak{p}}$ (die keine Parallelstruktur ist). Die Geradenmenge von $\hat{\mathfrak{p}}$ stimmt mit derjenigen von $\mathfrak{p}$ überein, die Punktmenge von $\hat{\mathfrak{p}}$ ist aber eine echte Erweiterung. Die Translationen von $\mathfrak{p}$ lassen sich auf $\hat{\mathfrak{p}}$ in naturgemäßer Weise fortsetzen. Bei der nächsten Erweiterung von $\hat{\mathfrak{p}}$ auf eine Struktur $\mathfrak{p}_1$ bleibt die Punktmenge ungeändert; die Geradenmenge vergrößern wir auf folgende Weise: (1) Anwendung aller Translationen von $\mathfrak{p}$ mit festem (uneigentlichem) Zentrum z auf einen Punkt p von $\hat{\mathfrak{p}}$ ergibt

[8]) Sie ist analog zu der in HALL (1943) eingeführten „freien Erweiterung" von Inzidenzstrukturen, aber komplizierter, da hier bei den Erweiterungsschritten auch die Translationstreue erhalten bleiben muß.

eine Punktmenge, die wir als neue Gerade von $\mathfrak{p}_1$ nehmen, wenn sie nicht nur aus p allein besteht (was bedeuten würde, daß nur die identische Translation z zum Zentrum hätte), und wenn die Punktmenge nicht schon Teil einer Geraden aus $\hat{\mathfrak{p}}$ ist. (2) Jedes Paar verschiedener Punkte von $\hat{\mathfrak{p}}$, durch das noch keine bisher konstruierte Gerade geht, wird zu einer Geraden gemacht, die nur mit diesen beiden Punkten inzidiert. (3) Durch jeden Punkt wird zu jeder Geraden eine „Parallele" hinzugefügt, falls noch keine existiert. Diese neu gewonnene Gerade inzidiert nur mit diesem Punkt.

Die so gewonnene Erweiterung $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}$ ist translationstreu und, bei geeigneter Definition der Parallelität, wieder eine t-Struktur. Fortführung desselben Konstruktionsverfahrens ergibt eine Kette translationstreuer Erweiterungen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \leqq \mathfrak{p}_1 \leqq \mathfrak{p}_2 \leqq \cdots$. Die Vereinigung $[\mathfrak{p}] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{p}_i$ dieser Kette (vgl. I, § 2, Ziffer 5) ist eine affine Ebene, die wir *freie translationstreue Erweiterungsebene* von $\mathfrak{p}$ nennen. Im nächsten Paragraphen werden wir den ersten Erweiterungsschritt, nämlich den von $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}_1$, im einzelnen durchführen; im übernächsten werden wir durch Iteration dieses Verfahrens die Ebene $[\mathfrak{p}]$ bilden und zeigen, daß sie eine translationstreue Erweiterung von $\mathfrak{p}$ ist (womit dann auch bestätigt wird, daß die Bezeichnung „freie *translationstreue* Erweiterungsebene" zu Recht besteht).

§ 4. Der erste Erweiterungsschritt

1. Es sei $\mathfrak{p}_0 = (P_0, \mathfrak{G}_0)$ eine t-Struktur und T deren Translationsgruppe. Über $\mathfrak{p}_0$ machen wir noch die beiden folgenden Voraussetzungen:

(A) *$\mathfrak{p}_0$ ist keine affine Ebene.*

(B) *In $\mathfrak{p}_0$ gibt es mindestens fünf Geraden G_j ($j = 1, \ldots, 5$), von denen keine zwei zueinander parallel sind, und für die $\mathsf{T}(G_j) - \{1\}$ gilt.* (Das heißt auf der uneigentlichen Geraden von $\mathfrak{p}_0$ gibt es fünf Punkte, die Zentren nur von der identischen Translation sind.)

Für das zu untersuchende Problem, $\mathfrak{p}_0$ translationstreu in eine affine Ebene einzubetten, bedeuten diese Voraussetzungen keine Beschränkung der Allgemeinheit. Ist nämlich $\mathfrak{p}_0$ eine affine Ebene, so ist das Problem bereits trivialerweise gelöst. Ist (B) für $\mathfrak{p}_0$ nicht erfüllt, so betten wir $\mathfrak{p}_0$ translationstreu in ein $\mathfrak{p}_0^{(J)}$ mit $|J| \geqq 5$ ein (vgl. § 3) und führen dann die Konstruktionsschritte für $\mathfrak{p}_0^{(J)}$ anstatt für $\mathfrak{p}_0$ durch. Die Voraussetzung (B) ist in $\mathfrak{p}_0^{(J)}$ z. B. für die Geraden $G_j = (p, j)$ ($p \in P_0$; $j = 1, \ldots, 5$) erfüllt.

Wir definieren die Erweiterung $\hat{\mathfrak{p}}_0 = (\hat{P}_0, \hat{\mathfrak{G}}_0)$ von $\mathfrak{p}_0$ auf folgende Weise durch Hinzunahme neuer Punkte, aber Beibehaltung der alten Geradenmenge: (α) $\hat{\mathfrak{G}}_0 = \mathfrak{G}_0$; ($\beta$) $\hat{P}_0$ bestehe aus den Punkten von P_0 und der Gesamtheit aller Mengen $\{G, G'\}$ von in $\mathfrak{p}_0$ windschief gelegenen Geraden $G, G' \in \mathfrak{G}_0$:

$$\hat{P}_0 = P_0 \cup \{\{G, G'\} \mid G, G' \in \mathfrak{G}_0,\ G \cap G' = \emptyset,\ G \nparallel G'\}. \tag{4.1}$$

Der Punkt $\{G, G'\}$ soll mit G und G', jedoch mit keiner weiteren Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ inzidieren, während die Punkte aus P_0 in $\hat{\mathfrak{p}}_0$ mit genau denjenigen Geraden

inzidieren, mit denen sie es in $\mathfrak{p}_0$ tun. Da $\mathfrak{p}_0$ keine affine Ebene ist, es in $\mathfrak{p}_0$ also Paare windschiefer Geraden gibt, ist $\hat{P}_0 > P_0$, also $\hat{\mathfrak{p}}_0$ eine echte Erweiterung von $\mathfrak{p}_0$. Offensichtlich ist $\hat{\mathfrak{p}}_0$ eine Inzidenzstruktur, denn durch zwei verschiedene Punkte von $\hat{P}_0$ geht höchstens eine Gerade aus $\hat{\mathfrak{p}}_0$. Dagegen ist $\hat{\mathfrak{p}}_0$ keine Parallelstruktur, denn (a 1) ist nicht erfüllt; vielmehr gilt:

HILFSSATZ 4.1. *Es gibt in $\hat{P}_0 - P_0$ mindestens zwei Punkte, durch die keine Verbindungsgerade aus $\hat{\mathfrak{G}}_0 = \mathfrak{G}_0$ geht.*

Zum Beweis brauchen wir wegen der in (β) gebrachten Inzidenzbedingung nur zu zeigen, daß es zwei Paare $\{G_1, G_1'\}$ und $\{G_2, G_2'\}$ von in $\mathfrak{p}_0$ windschief gelegenen Geraden gibt derart, daß G_1, G_1', G_2, G_2' paarweise verschieden sind. Zunächst gibt es *ein* Paar $\{G_1, G_1'\}$ windschiefer Geraden; ferner existiert nach Satz 1.1 eine Translation τ, deren Zentrum weder der uneigentliche Punkt von G_1 noch der von G_1' ist, also gilt $G_1^\tau \neq G_1$ und $G_1'^\tau \neq G_1'$, aber auch $G_1^\tau \neq G_1'$ und $G_1'^\tau \neq G_1'$ wegen $G_1 \nparallel G_1'$. Somit sind $\{G_1, G_1'\}$ und $\{G_1^\tau, G_1'^\tau\}$ die gewünschten Paare.

Jede (affine) Kollineation γ von $\mathfrak{p}_0$ läßt sich in naturgemäßer Weise eindeutig zu einer Kollineation von $\hat{\mathfrak{p}}_0$ fortsetzen (die wir ebenfalls γ nennen können und wollen), indem wir $\{G, G'\}^\gamma = \{G^\gamma, G'^\gamma\}$ setzen. (Dies können wir tun, denn liegen G und G' in $\mathfrak{p}_0$ zueinander windschief, so auch G^γ und G'^γ.) Diese Bemerkung gilt insbesondere auch für die Translationen von $\mathfrak{p}_0$.

2. Wir erweitern jetzt $\hat{\mathfrak{p}}_0 = (\hat{P}_0, \hat{\mathfrak{G}}_0)$ zu einer Struktur $\mathfrak{p}_1 = (P_1, \mathfrak{G}_1)$, indem wir nur die Geradenmenge $\hat{\mathfrak{G}}_0$ zu $\mathfrak{G}_1$ vergrößern, die Punktmenge aber ungeändert lassen: $P_1 = \hat{P}_0$. Dabei soll die Parallelitätsrelation von $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{p}_1$ erweitert werden, und zwar so, daß die Parallelität auch in $\mathfrak{p}_1$ eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist. Die Menge $\mathfrak{G}_1$ der Geraden von $\mathfrak{p}_1$ soll aus den folgenden Elementen bestehen:

(0) Aus den Geraden von $\mathfrak{G}_0$. Zwei solche Geraden sollen in $\mathfrak{p}_1$ genau dann zueinander parallel liegen, wenn dies in $\mathfrak{p}_0$ der Fall ist.

(1) Aus den Mengen $p^{\mathsf{T}(G)}$ mit $p \in \hat{P}_0$ und $G \in \mathfrak{G}_0$, wenn (a) $\mathsf{T}(G) > \{\underline{1}\}$ (d.h. die Menge $p^{\mathsf{T}(G)}$ mindestens zwei Punkte enthält) und (b) die Menge $p^{\mathsf{T}(G)}$ keine Teilmenge von Punkten einer Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ ist. Inzidenz mit $p^{\mathsf{T}(G)}$ soll (mengentheoretische) Zugehörigkeit zu $p^{\mathsf{T}(G)}$ bedeuten. Die Menge der so erhaltenen Geraden $p^{\mathsf{T}(G)}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_{01}$. Definitionsgemäß sei genau dann ein $G \in \mathfrak{G}_0$ zu einem $G = p^{\mathsf{T}(G')} \in \mathfrak{G}_{01}$ ($G' \in \mathfrak{G}_0$) parallel, wenn $G \| G'$ in $\mathfrak{p}_0$ ist, ferner seien zwei Geraden $G_i = p_i^{\mathsf{T}(G_i)} \in \mathfrak{G}_{01}$ ($G_i \in \mathfrak{G}_0$; $p_i \in \hat{P}_0$; $i = 1, 2$) parallel, wenn die G_i in $\mathfrak{p}_0$ zueinander parallel liegen.

(2) Aus den Mengen $\{p, q\}$ ($p, q \in \hat{P}_0$, $p \neq q$), falls p mit q durch keine Gerade aus $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01}$ verbunden werden kann. Jedes so gewonnene $\{p, q\}$ soll mit p und q, aber keinem weiteren Punkt aus $\hat{P}_0$ inzidieren. Die Menge dieser Geraden bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_{02}$. Keine Gerade aus $\mathfrak{G}_{02}$ soll zu einer Geraden aus $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01}$ parallel liegen. Dagegen seien zwei Geraden $\{p, q\}$ und $\{p', q'\}$ aus $\mathfrak{G}_{02}$ genau dann zueinander parallel, wenn es ein $\tau \in \mathsf{T}$ gibt derart, daß

die Punktmenge $\{p, q\}$ durch τ in die Menge $\{p', q'\}$ übergeführt wird: $\{p', q'\} = \{p, q\}^\tau = \{p^\tau, q^\tau\}$.

(3) Schließlich soll $\mathfrak{G}_1$ noch alle Paare (G, p) $[p \in \hat{P}_0;\ G \in \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{02}]$ unter folgender Bedingung enthalten: In $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{02}$ existiert keine zu G parallele Gerade[9]) durch p (im Sinne unserer bisher eingeführten Parallelitätsdefinitionen). Die Menge der so erhaltenen Paare (G, p) nennen wir $\mathfrak{G}_{03}$. Jedes $(G, p) \in \mathfrak{G}_{03}$ soll mit p, aber keinem weiteren Punkt aus $\hat{P}_0$ inzidieren. Ferner sei (G, p) genau dann zu G' oder (G', p') parallel $(G, G' \in \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{02};\ p, p' \in \hat{P}_0)$, wenn G zu G' parallel im Sinne unserer früheren Festsetzungen ist. Dagegen soll keine Gerade aus $\mathfrak{G}_{01}$ zu einer Geraden aus $\mathfrak{G}_{03}$ parallel sein.

Damit haben wir die Punkte, Geraden, Inzidenz- und Parallelitätsrelationen in $\mathfrak{p}_1$ vollständig festgelegt, also $\mathfrak{p}_1$ vollkommen bestimmt. Für die Geradenmenge von $\mathfrak{p}_1$ gilt

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01} \cup \mathfrak{G}_{02} \cup \mathfrak{G}_{03}. \tag{4.2}$$

Das in Fig. 1 gebrachte Schema ist in folgender Weise zu lesen: Ein Kreuz (×) im Schnitt der Zeile $\mathfrak{G}_{0i}$ mit der Spalte $\mathfrak{G}_{0k}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3;\ \mathfrak{G}_{00} = \mathfrak{G}_0$ gesetzt) besagt, daß es eine Gerade aus $\mathfrak{G}_{0i}$ gibt, die zu einer aus $\mathfrak{G}_{0k}$ parallel ist. Ein Kreis (○) in diesem Schnitt bedeutet das Gegenteil: Keine Gerade aus $\mathfrak{G}_{0i}$ ist zu einer aus $\mathfrak{G}_{0k}$ parallel.

	$\mathfrak{G}_0$	$\mathfrak{G}_{01}$	$\mathfrak{G}_{02}$	$\mathfrak{G}_{03}$
$\mathfrak{G}_0$	×	×	○	×
$\mathfrak{G}_{01}$	×	×	○	○
$\mathfrak{G}_{02}$	○	○	×	×
$\mathfrak{G}_{03}$	×	○	×	×

Fig. 1

3. Wir wollen jetzt zeigen, daß die soeben konstruierte Struktur $\mathfrak{p}_1$ eine t-Struktur darstellt, die eine translationstreue Erweiterung von $\mathfrak{p}_0$ ist. Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 4.2. *$\mathfrak{p}_1$ ist eine a. P.*

Beweis. Nach Konstruktion der Geraden aus $\mathfrak{G}_1$ geht durch zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{p}_1$ genau eine Gerade, also gelten (a 0) und (a 1). Die in $\mathfrak{p}_1$ definierte Parallelenrelation erfüllt die drei Äquivalenzbedingungen: Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbar ersichtlich, aber auch die Transitivität ist ohne weiteres nachzuprüfen, indem man alle möglichen Fälle durchdiskutiert. Zum Beweis von (a 2) ist zunächst zu sagen, daß die Existenz einer Parallele durch einen Punkt zu einer Geraden nach Konstruktion stets gesichert ist. Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen, d.h. daß zwei verschiedene (im Sinne unserer in der vorigen Ziffer gemachten Festsetzungen) parallele Geraden $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_1$ sich niemals schneiden können. Dies ist klar, wenn beide Geraden in $\mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_{03}$ liegen, oder wenn die eine der Geraden in $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01} \cup \mathfrak{G}_{02}$ und die andere in $\mathfrak{G}_{03}$ liegt. Sei nun $G_1 \in \mathfrak{G}_0$ und $G_2 \in \mathfrak{G}_{01}$. O.B.d.A. können wir $G_2 = p^{\mathsf{T}(G_1)}$ setzen. Aus $p^\tau \in G_1 \cap G_2$ für ein $\tau \in \mathsf{T}(G_1)$ würde $G_2 \subseteqq G_1$ folgen, im Widerspruch zur Konstruktion von $\mathfrak{G}_{01}$. Sind $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_{01}$ und $G_1 \| G_2$, so gibt es ein $G \in \mathfrak{G}_0$ derart, daß $G_i = p_i^{\mathsf{T}(G)}$ ist $(i = 1, 2;\ p_i \in \hat{P}_0)$.

[9]) Ist $G \in \mathfrak{G}_{01}$ und $p \in \hat{P}_0$, so existiert bereits in $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01}$ eine zu G parallele Gerade durch p, nämlich die durch die Punkte p^τ mit $\tau \in \mathsf{T}(G)$ gehende Gerade.

Aus $p \in G_1 \cap G_2$ folgt $p = p_1^{\tau_1} = p_2^{\tau_2}$ für geeignete $\tau_i \in \mathsf{T}(G)$, also $p_2 = p_1^{\tau_1 \tau_2^{-1}}$ und hieraus $G_1 = G_2$. Sei $G_i = \{p_i, q_i\} \in \mathfrak{G}_{02}$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \| G_2$ und $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Dann ist o.B.d.A. $p_1 = p_2$. Aus der Parallelität von G_1 zu G_2 folgt $p_2 = p_1^\tau$, $q_2 = q_1^\tau$, oder $q_2 = p_1^\tau$, $p_2 = q_1^\tau$ für ein $\tau \in \mathsf{T}$. Im ersten Fall ist $\tau = \underline{1}$ (vgl. I, Satz 4.4), also $G_1 = G_2$; im zweiten Fall wäre $q_2 = p_2^\tau$, $\tau \neq \underline{1}$, mithin p_2 und q_2 durch eine Gerade aus $\mathfrak{G}_{01}$ verbunden, was nicht der Fall sein sollte. Damit ist auch (a 2) vollständig bewiesen.

Axiom (a 3) gilt für $\mathfrak{p}_0$ und damit erst recht für $\mathfrak{p}_1$, denn $\mathfrak{p}_1$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{p}_0$. Axiom (a 4) ist für die Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ voraussetzungsgemäß und für die anderen nach Konstruktion erfüllt. Damit ist Hilfssatz 4.2 vollständig bewiesen.

4. In Ziffer 1 haben wir die Kollineationen γ von $\mathfrak{p}_0$ eindeutig auf $\hat{\mathfrak{p}}_0$ fortgesetzt. Nunmehr erweitern wir diese (eindeutig) in natürlicher Weise auf $\mathfrak{p}_1$ durch:

$$p^{\mathsf{T}(G)\gamma} = p^{\gamma\gamma^{-1}\mathsf{T}(G)\gamma} = p^{\gamma\mathsf{T}(G^\gamma)} \qquad (G \in \mathfrak{G}), \tag{4.3}$$

$$\{p, q\}^\gamma = \{p^\gamma, q^\gamma\}, \tag{4.4}$$

$$(G, p)^\gamma = (G^\gamma, p^\gamma). \tag{4.5}$$

Wir müssen zeigen, daß die so fortgesetzten Abbildungen sinnvoll sind, d.h. daß die rechten Seiten von (4.3) bis (4.5) tatsächlich Geraden aus $\mathfrak{G}_{01}$ bzw. $\mathfrak{G}_{02}$ bzw. $\mathfrak{G}_{03}$ darstellen.

Zu (4.3). Gäbe es ein $G' \in \mathfrak{G}_0$ mit $p^{\mathsf{T}(G)\gamma} \subseteq G'$, so wäre $p^{\mathsf{T}(G)} \subseteq G'^{\gamma^{-1}} \in \mathfrak{G}_0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $\mathfrak{G}_{01}^\gamma \subseteq \mathfrak{G}_{01}$.

Zu (4.4). Würden p^γ und q^γ mit einem $G \in \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01}$ inzidieren, so wären $p, q \in G^{\gamma^{-1}} \in \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01}$. Daraus folgt $\mathfrak{G}_{02}^\gamma \subseteq \mathfrak{G}_{02}$.

Zu (4.5). Gäbe es in $\mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01} \cup \mathfrak{G}_{02}$ eine Gerade G', die mit p^γ inzidiert und zu G^γ parallel ist, so wäre $G'^{\gamma^{-1}} \in \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_{01} \cup \mathfrak{G}_{02}$ zu G parallel und würde mit p inzidieren; mithin ist $\mathfrak{G}_{03}^\gamma \subseteq \mathfrak{G}_{03}$.

Insbesondere setzen sich auch die Translationen von $\mathfrak{p}_0$ als Kollineationen auf $\mathfrak{p}_1$ fort. Genauer gilt:

HILFSSATZ 4.3. *Die Fortsetzung einer Translation*[10]) *von* $\mathfrak{p}_0$ *auf* $\mathfrak{p}_1$ *ist eine zentrale Translation auf* $\mathfrak{p}_1$.

BEWEIS. Sei $\tau \neq \underline{1}$ eine Translation auf $\mathfrak{p}_0$ [deren Fortsetzung auf $\mathfrak{p}_1$ gemäß (4.3) bis (4.5) wir ebenfalls τ nennen]. Aus den Formeln (4.3) bis (4.5) und den Definitionen der Parallelität in $\mathfrak{p}_1$ folgt sofort, daß τ auch in $\mathfrak{p}_1$ jede Gerade in eine zu ihr parallele abbildet; in (4.3) ist dabei zu beachten, daß $\mathsf{T}(G) = \mathsf{T}(G^\tau)$ $(G \in \mathfrak{G}_0)$ ist, denn $\mathfrak{p}_0$ ist voraussetzungsgemäß eine t-Struktur. Ferner läßt τ keinen Punkt aus $\hat{P}_0$ fest. Wäre nämlich $\{G, G'\}^\tau = \{G, G'\}$ für ein $\{G, G'\} \in \hat{P}_0 - P_0$ $(G, G' \in \mathfrak{G}_0)$, so würde $G^\tau = G$ und $G'^\tau = G'$ gelten wegen $G \nparallel G'$. Mithin hätte τ (als Translation von $\mathfrak{p}_0$ aufgefaßt) die voneinander ver-

[10]) Ebenso ist jede Fortsetzung einer Streckung von $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{p}_1$ eine Streckung auf $\mathfrak{p}_1$. Der Beweis hierfür ist analog dem von Hilfssatz 4.3.

schiedenen uneigentlichen Punkte von G und G' zu Zentren, was wegen $\tau \neq \underline{1}$ nicht sein kann. Also ist τ auch auf $\mathfrak{p}_1$ eine Translation. (Ist $\tau = \underline{1}$ auf $\mathfrak{p}_0$, so auch auf $\mathfrak{p}_1$, was sofort aus I, Satz 4.1 folgt.) Es bleibt noch zu zeigen, daß τ auf $\mathfrak{p}_1$ zentral ist. O.B.d.A. nehmen wir wieder $\tau \neq \underline{1}$ an. Jedenfalls gibt es ein $G \in \mathfrak{G}_0$ derart, daß $G'^{\tau} = G'$ für alle $G' \in \mathfrak{G}_0$ gilt, die zu G parallel sind, denn τ ist auf $\mathfrak{p}_0$ zentral. Sei nun $G' \in \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_0$ und $G' \| G$, ferner $\mathfrak{p}'$ ein auf G' gelegener Punkt von $\hat{P}_0$. In diesem Falle ist $G' = \mathfrak{p}'^{\mathsf{T}(G)} \in \mathfrak{G}_{01}$ und $G'^{\tau} = G'$. Somit bleibt auch jede in $\mathfrak{p}_1$ zu G parallele Gerade bei Anwendung von τ (als Ganzes) fest. Damit ist τ in $\mathfrak{p}_1$ als zentral erkannt.

Hilfssatz 4.4. *Genau die nicht zu P_0 gehörenden Punkte aus $\hat{P}_0$ inzidieren mit Geraden aus $\mathfrak{G}_{03}$, die zu Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ parallel sind.*

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{p} \in P_0$. Jede durch $\mathfrak{p}$ gehende Parallele zu einem $G \in \mathfrak{G}_0$ liegt ebenfalls in $\mathfrak{G}_0$, da ja $\mathfrak{p}_0$ als a.P. vorausgesetzt war. Durch ein solches $\mathfrak{p}$ kann mithin keine Gerade aus $\mathfrak{G}_{03}$ gehen, die zu einer Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ parallel ist.

(b) Sei jetzt $\mathfrak{p} \in \hat{P}_0 - P_0$. Dann ist $\mathfrak{p} = \{G_1, G_2\}$, wobei G_1 und G_2 (in $\mathfrak{p}_0$) windschiefe Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ sind. Nach unserer zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Voraussetzung (B) gibt es ein $G \in \mathfrak{G}_0$, welches weder zu G_1 noch zu G_2 parallel ist und für das $\mathsf{T}(G) = \{\underline{1}\}$ gilt. Die durch $\mathfrak{p}$ gehende zu G parallele Gerade G^* von $\mathfrak{p}_1$ gehört nicht zu $\mathfrak{G}_0$, denn die einzigen durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ sind G_1 und G_2. Wegen $\mathsf{T}(G) = \{\underline{1}\}$ gehört sie auch nicht zu $\mathfrak{G}_{01}$. Da keine Gerade von $\mathfrak{G}_{02}$ zu einer aus $\mathfrak{G}_0$ parallel ist (vgl. Fig. 1) kann G^* auch nicht in $\mathfrak{G}_{02}$ liegen. Mithin gehört $G^* = (G, \mathfrak{p})$ zu $\mathfrak{G}_{03}$.

Hilfssatz 4.5. *Genau diejenigen Geraden aus $\mathfrak{p}_1$, die mit nur einem Punkt inzidieren, gehören zu $\mathfrak{G}_{03}$.*

Beweis. Jedenfalls inzidieren nach Konstruktion die Geraden aus $\mathfrak{G}_{03}$ mit nur einem Punkt. Dagegen enthält jede Gerade aus $\mathfrak{G}_{02}$ genau zwei und eine Gerade $\mathfrak{p}^{\mathsf{T}(G)} \in \mathfrak{G}_{01}$ genau $|\mathsf{T}(G)| > 1$ Punkte. Geraden aus $\mathfrak{G}_0$ können zwar in $\mathfrak{p}_0$ mit nur einem Punkt inzidieren, jedoch nicht in $\mathfrak{p}_1$. Enthalte nämlich ein $G \in \mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{p}_0$ nur einen Punkt $\mathfrak{p}$. Nach Satz 1.4 gibt es in $\mathfrak{p}_0$ ein nichtausgeartetes Viereck, dessen einer Eckpunkt $\mathfrak{p}$ ist. Die anderen Eckpunkte mögen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ sein. Wegen unserer Annahme hat keine der Verbindungsgeraden $\langle \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k \rangle_{\mathfrak{p}_0}$ $(i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$ mit G in $\mathfrak{p}_0$ einen Schnittpunkt gemeinsam. Mindestens eine der Geraden, etwa $\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \rangle$, ist zu G nicht parallel. Dann ist $\{G, \langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \rangle\} \in \hat{P}_0 = P_1$ ein zweiter Punkt, der mit G in $\mathfrak{p}_1$ inzidiert.

5. Sei nun γ^* eine *beliebige* Kollineation von $\mathfrak{p}_1$ [also nicht notwendig eine, die von einer Kollineation von $\mathfrak{p}_0$ induziert wird (im Sinne von (4.3) bis (4.5))]. Aus Hilfssatz 4.5 folgt wegen $|G^{\gamma^*}| = |G|$ für jedes $G \in \mathfrak{G}_1$ sofort $\mathfrak{G}_{03}^{\gamma^*} \subseteq \mathfrak{G}_{03}$. Da dasselbe für γ^{*-1} gilt, haben wir:

Hilfssatz 4.6. *Für jede Kollineation γ^* von $\mathfrak{p}_1$ gilt*

$$\mathfrak{G}_{03}^{\gamma^*} = \mathfrak{G}_{03}. \tag{4.6}$$

Eine Translation τ^* von $\mathfrak{p}_1$ führt insbesondere jede Gerade in eine zu ihr parallele über. Zusammen mit den Hilfssätzen 4.4 und 4.6 ergibt diese Bemerkung $(\hat{P}_0 - P_0)^{\tau^*} = \hat{P}_0 - P_0$, also:

HILFSSATZ 4.7. *Jede Translation τ^* von $\mathfrak{p}_1$ bildet P_0 auf sich ab*[11]:

$$P_0^{\tau^*} = P_0. \tag{4.7}$$

Nach (4.7) ist die Bedingung (a') für eine translationstreue Erweiterung erfüllt (vgl. I, §4, Ziffer 5); aus Hilfssatz 4.3 folgt einerseits (b') und andererseits, daß jede Translation von $\mathfrak{p}_1$ zentral ist. Somit erhalten wir:

SATZ 4.1. *Die durch die freie translationstreue Erweiterung (im Sinne der in den Ziffern 1 und 2 angegebenen Konstruktion) der t-Struktur $\mathfrak{p}_0$ gewonnene Struktur $\mathfrak{p}_1$ ist eine über $\mathfrak{p}_0$ translationstreue t-Struktur.*

BEMERKUNG. Die Voraussetzungen (A) und (B) sind auch für $\mathfrak{p}_1$ gültig. Denn $\mathfrak{p}_1$ ist keine affine Ebene, weil $\mathfrak{p}_1$ Geraden mit nur einen Punkt enthält (nämlich die Geraden aus $\mathfrak{G}_{03}$). Die nach Voraussetzung (B) in $\mathfrak{G}_0$ existierenden Geraden G_i $(i = 1, \ldots, 5)$ mit $\mathsf{T}(G_i) = \{\underline{1}\}$ haben nach Satz 4.1 in $\mathfrak{p}_1$ dieselbe Eigenschaft, also ist auch (B) in $\mathfrak{p}_1$ erfüllt.

§ 5. Die freie translationstreue Erweiterungsebene $[\mathfrak{p}_0]$

1. Aus Satz 4.1 und der daran anschließenden Bemerkung folgt, daß für $\mathfrak{p}_1$ dieselben Voraussetzungen erfüllt sind wie für $\mathfrak{p}_0$. Fortgesetzte Anwendung desselben Konstruktionsverfahrens ergibt somit eine aufsteigende Kette von t-Strukturen

$$\mathfrak{p}_0 \leqq \mathfrak{p}_1 \leqq \mathfrak{p}_2 \leqq \cdots, \tag{5.1}$$

in der $\mathfrak{p}_{n+1}$ aus $\mathfrak{p}_n = (P_n, \mathfrak{G}_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nach demselben Verfahren gebildet wird wie $\mathfrak{p}_1$ aus $\mathfrak{p}_0$ (s. §4). Die Punktmenge $\hat{P}_n$ entspricht dabei der Menge $\hat{P}_0$, die Geradenmengen $\mathfrak{G}_n$, $\mathfrak{G}_{n1}$, $\mathfrak{G}_{n2}$ und $\mathfrak{G}_{n3}$ den Mengen $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_{01}$, $\mathfrak{G}_{02}$ und $\mathfrak{G}_{03}$. Es ist also

$$P_{n+1} = \hat{P}_n, \qquad \mathfrak{G}_{n+1} = \mathfrak{G}_n \cup \mathfrak{G}_{n1} \cup \mathfrak{G}_{n2} \cup \mathfrak{G}_{n3}. \tag{5.2}$$

Wegen Satz 4.1 und I, Satz 4.7 ist jedes $\mathfrak{p}_n$ eine über $\mathfrak{p}_0$ translationstreue t-Struktur.

HILFSSATZ 5.1. *Die Vereinigung*

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{p}_0] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{p}_i \tag{5.3}$$

(vgl. I, §2, Ziffer 5) *der t-Strukturen der Kette* (5.1) *ist eine affine Ebene.*

Hierzu müssen wir nur noch zeigen, daß zwei nichtparallele Geraden von $\mathfrak{A} = (P, \mathfrak{G})$ sich stets schneiden. Seien $G, G' \in \mathfrak{G}$, $G \nparallel G'$. Wegen $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}_1 \subseteq \cdots$ und $\mathfrak{G} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{G}_i$ gibt es ein n derart, daß G und G' zu $\mathfrak{G}_n$ gehören. Haben

[11]) Satz und Beweis übertragen sich sofort auch auf Streckungen von $\mathfrak{p}_1$.

G und G' in $\mathfrak{p}_n$ noch keinen Punkt gemeinsam, so ist $\{G, G'\} \in P_{n+1}$ der gesuchte Schnittpunkt.

Definition. Wir nennen die so erhaltene affine Ebene $\mathscr{A} = [\mathfrak{p}_0]$ die *von $\mathfrak{p}_0$ erzeugte freie translationstreue Erweiterungsebene.*

2. Wir wollen jetzt zeigen, daß der Ausdruck „translationstreu" bei der Benennung von $\mathscr{A}$ zu Recht besteht, d.h. daß $\mathscr{A}$ translationstreu über $\mathfrak{p}_0$ ist. Die Bedingung (b') [vgl. I, §4, Ziffer 5] ist sofort einzusehen. Sei nämlich τ eine Translation von $\mathfrak{p}_0$. Nach Hilfssatz 4.3 läßt sich τ eindeutig auf $\mathfrak{p}_1$, also auch auf jedes $\mathfrak{p}_n$ fortsetzen. (Diese Fortsetzung können und wollen wir ebenfalls τ nennen.) Da jeder Punkt und jede Gerade von $\mathscr{A}$ einem P_n bzw.

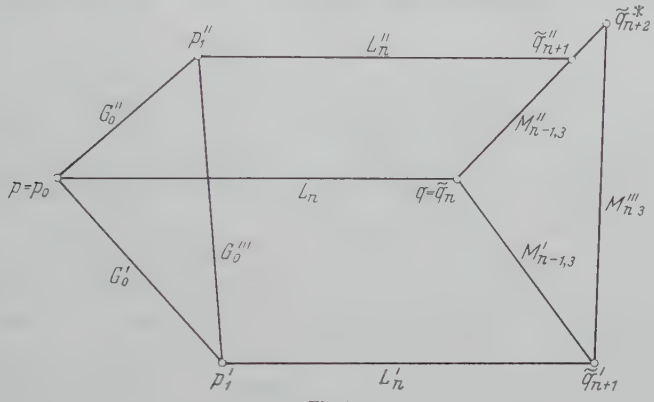

Fig. 2

$\mathfrak{G}_n$ angehört, ist die Abbildung τ auf der ganzen Ebene definiert. Sie ist dort eine Translation, da sie es auf jedem $\mathfrak{p}_n$ ist.

Es bleibt somit noch (a') zu beweisen:

Hilfssatz 5.2. *Für jede Translation τ von $\mathscr{A}$ gilt $P_0^\tau = P_0$.*

Wir müssen also zeigen, daß es in $\mathscr{A}$ keine Translation geben kann, die ein $p \in P_0$ in ein $q \in P_n - P_{n-1}$ mit $n \geq 1$ abbildet. Dieser Beweis wird so geführt: Es wird eine kleine Desarguessche Konfiguration mit p, q als ein Paar entsprechender Dreieckspunkte angegeben, die sich nicht schließt (vgl. Fig. 2). Hieraus folgt dann sofort, daß keine Translation p in q überführen kann.

Zur Abkürzung setzen wir $P_n - P_{n-1} = \tilde{P}_n$ und $\mathfrak{G}_n - \mathfrak{G}_{n-1} = \tilde{\mathfrak{G}}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ferner verabreden wir der einfacheren Schreibweise wegen folgendes: Ein an einem Punkt p oder einer Geraden G angebrachter Index i $(= 0, 1, \ldots)$ besagt, daß das betreffende Element in P_i bzw. $\mathfrak{G}_i$ liegt: $p_i \in P_i$, $G_i \in \mathfrak{G}_i$. Aufsetzen einer Tilde (~) auf p_i bedeutet, daß der betreffende Punkt zu $\tilde{P}_i$ gehört; $\tilde{p}_i \in \tilde{P}_i$. Ein an einer Geraden angebrachter Doppelindex ik $(k = 1, 2, 3)$ besagt, daß sie in $\mathfrak{G}_{ik}$ liegt: $G_{ik} \in \mathfrak{G}_{ik}$.

Seien nun $p = p_0$ und $q = \tilde{q}_n$ $(n \geq 1)$ im Sinne der eben gemachten Verabredung beliebig vorgegeben; wir setzen $\langle p_0, \tilde{q}_n \rangle = L_n$ (s. auch Fig. 2). Durch p_0 legen wir zwei von L_n verschiedene Geraden G_0' und G_0'' mit $\mathsf{T}(G_0') = \mathsf{T}(G_0'') = \{\underline{1}\}$,

ferner sei G_0''' eine nicht durch p_0 gehende und nicht zu G_0', G_0'' und L_n parallele Gerade, ebenfalls mit $\mathsf{T}(G_0''') = \{\underline{1}\}$. Nach unserer Voraussetzung (B) und wegen der Gültigkeit von (a 3) in $\mathfrak{p}_0$ kann man solche Geraden immer finden. Es seien K_{n-1} und K'_{n-1} die $\tilde{q}_n$ erzeugenden Geraden, d.h. $\tilde{q}_n = \{K_{n-1}, K'_{n-1}\}$. Für G_0' und G_0'' fordern wir nun außerdem noch, daß sie weder zu K_{n-1} noch zu K'_{n-1} parallel sind. Um zu beweisen, daß diese Forderung mit der vorher genannten verträglich ist, machen wir die folgende Fallunterscheidung:

(a) L_n ist von K_{n-1} und K'_{n-1} verschieden. Dann ist $L_n \in \tilde{\mathfrak{G}}_n$, weil durch $\tilde{q}_n$ aus $\mathfrak{G}_{n-1}$ nur die beiden $\tilde{q}_n$ erzeugenden Geraden gehen. Nehmen wir an, G_0' und G_0'' seien zu K_{n-1} und K'_{n-1} parallel; nach (B) können wir dann G_0' und G_0'' so zu Geraden G_0^* und G_0^{**} abändern, daß 1). $\mathsf{T}(G_0^*) = \mathsf{T}(G_0^{**}) = \{\underline{1}\}$ ist und 2). G_0^* und G_0^{**} weder zu G_0''' noch zu K_{n-1} oder K'_{n-1} parallel sind.

(b) Sei $L_n = K_{n-1}$ (o.B.d.A.). Ist K'_{n-1} o.B.d.A. zu G_0' parallel, so ändern wir G_0' so zu G_0^* ab, daß wieder $\mathsf{T}(G_0^*) = \{\underline{1}\}$ und G_0^* weder zu G_0''' noch zu K_{n-1} oder K'_{n-1} parallel ist. Die Möglichkeit hierfür ergibt sich ebenfalls aus (B).

Es sind also alle der oben gemachten Annahmen über G_0' und G_0'' erfüllbar.

Wir setzen jetzt[12]) $G_0' \frown G_0''' = p_1'$ und $G_0'' \frown G_0''' = p_1''$, $\langle L_n \| p_1' \rangle = L_n'$ und $\langle L_n \| p_1'' \rangle = L_n''$, ferner $\langle G_0' \| \tilde{q}_n \rangle = M'_{n-1,3}$ und $\langle G_0'' \| \tilde{q}_n \rangle = M''_{n-1,3}$. Die Indizierungen an den M bestehen (im Sinne unserer oben gemachten Vereinbarungen) zu Recht. Denn wegen $G_0' \nparallel K_{n-1}$, K'_{n-1} ist $M'_{n-1,3} \in \tilde{\mathfrak{G}}_n$. Wegen $\mathsf{T}(G_0') = \{\underline{1}\}$ (und Satz 4.1) kann $M'_{n-1,3}$ nicht in $\mathfrak{G}_{n-1,1}$, wegen $M'_{n-1,3} \| G_0'$ nicht in $\mathfrak{G}_{n-1,2}$ liegen (vgl. Fig. 1). Entsprechendes gilt für $M''_{n-1,3}$. Also gilt $M'_{n-1,3}$, $M''_{n-1,3} \in \mathfrak{G}_{n-1,3}$, was behauptet war. Außer $\tilde{q}_n$ gehört kein Punkt von $M'_{n-1,3}$ bzw. $M''_{n-1,3}$ zu P_n. Mithin ist $M'_{n-1,3} \frown L_n' = \tilde{q}'_{n+1}$ und $M''_{n-1,3} \frown L_n'' = \tilde{q}''_{n+1}$. Offensichtlich sind $M'_{n-1,3}$ und L_n' die erzeugenden Geraden von $\tilde{q}'_{n+1}$, d.h. $\tilde{q}'_{n+1} = \{M'_{n-1,3}, L_n'\}$. Aus denselben Gründen wie eben ist $\langle G_0''' \| q'_{n+1} \rangle = M'''_{n,3} \in \mathfrak{G}_{n,3}$. Da kein weiterer Punkt von $M'''_{n,3}$ in P_{n-1} liegt, gilt $M'''_{n3} \frown L_n'' = \tilde{q}_{n+2} = \tilde{q}''_{n+1}$.

Gäbe es nun in $\mathscr{A} = [\mathfrak{p}_0]$ eine Translation τ, die p_0 in $\tilde{q}_n$ überführt, so wäre $p_1''^{\tau} = \tilde{q}''_{n+1} = \tilde{q}_{n+2}$, im Widerspruch zu dem eben gezeigten. Somit ist $P_0^{\tau} \subseteq P_0$, ebenso gilt aber auch $P_0^{\tau^{-1}} \subseteq P_0$, also Hilfssatz 5.2.

3. Damit ist gezeigt, daß $\mathscr{A}$ translationstreu über $\mathfrak{p}_0$ ist:

SATZ 5.1. *Die von einer t-Struktur $\mathfrak{p}_0$ erzeugte freie translationstreue Erweiterungsebene $[\mathfrak{p}_0]$ ist translationstreu*[13]) *über $\mathfrak{p}_0$.*

Hiermit ist das im vorletzten Paragraphen gestellte Problem, eine t-Struktur translationstreu in eine affine Ebene einzubetten, vollständig gelöst.

Insbesondere gilt die folgende Spezialisierung:

ZUSATZ 1. *Jede zentrale Translationsstruktur ist translationstreu in eine affine Ebene einbettbar.*

[12]) Vgl. Fußnote 6.

[13]) Jedenfalls unter der Voraussetzung (B) von § 4, die aber, wie dort gezeigt, keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Aus den Ergebnissen von II (insbesondere Satz 1.3) folgt nun:

Zusatz 2. *Jede abelsche Gruppe mit einer Partition ist Translationsgruppe einer affinen Ebene.*

§ 6. Die Streckungen der freien translationstreuen Erweiterungsebene

1. Durch die Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben wir eine vollständige Übersicht über die Translationen der freien translationstreuen Erweiterungsebene $\mathfrak{A} = [p_0]$ von p_0 erhalten: Sie stimmen mit denen von p_0 überein. Wir zeigen jetzt weitergehend, daß alle affin-axialen Kollineationen (vgl. I, § 4, Ziffer 4) von $\mathfrak{A}$ mit denen von p_0 übereinstimmen, daß also $\mathfrak{A}$ eine hinsichtlich der Gruppe der affin-axialen Kollineationen (d. h. der von den Translationen und Streckungen erzeugten Gruppe) treue Erweiterung von p_0 ist. Der Beweis hierfür wird ähnlich dem für die Translationstreue (vgl. § 5) geführt. Analog zu Hilfssatz 5.2 zeigen wir zunächst:

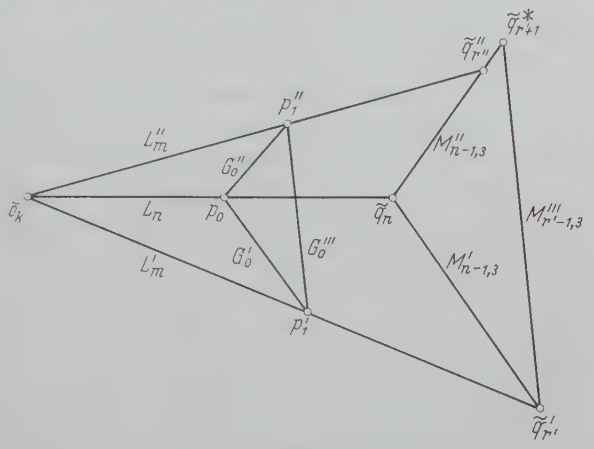

Fig. 3

Hilfssatz 6.1. *Für jede Streckung σ von $\mathfrak{A}$ gilt $P_0^\sigma = P_0$.*

Zum Beweis machen wir wieder dieselben Verabredungen über die Indizierung von Punkten und Geraden wie im vorigen Paragraphen. Sei $\tilde{o}_k$ das Zentrum der Streckung σ von $\mathfrak{A}$, von der wir annehmen wollen, daß sie p_0 in $\tilde{q}_n = \{K_{n-1}, K'_{n-1}\}$ mit $n \geqq 1$ abbilde. (Vgl. auch Fig. 3.) Die Punkte $\tilde{o}_k$, p_0 und $\tilde{q}_n$ liegen mithin auf einer Geraden L_n. Es seien wieder G'_0, G''_0 und G'''_0 drei nicht zueinander parallele Geraden, für die $\mathsf{T}(G'_0) = \mathsf{T}(G''_0) = \mathsf{T}(G'''_0) = \{\underline{1}\}$, $p_0 \in G'_0, G''_0$, $p_0 \notin G'''_0$ und $K_{n-1}, K'_{n-1} \nparallel G'_0, G''_0$ gelten. Die Existenz solcher Geraden [unter Voraussetzung (B) von § 4] ergibt sich ebenso wie beim Beweis von Hilfssatz 5.2. Außerdem müssen wir noch $\tilde{o}_k \notin G'''_0$ verlangen. Auch dies ist noch zu erreichen, denn aus Satz 1.4 zusammen mit Axiom (a 2) folgt sofort, daß es in einer t-Struktur zu jeder Geraden mindestens zwei von ihr verschiedene und zu ihr parallele Geraden gibt.

Wir setzen jetzt $p'_1 = G'_0 \frown G'''_0$, $p''_1 = G''_0 \frown G'''_0$, $L'_m = \langle \tilde{o}_k, p'_1 \rangle$, $L''_m = \langle \tilde{o}_k, p''_1 \rangle$ [wobei $m = \mathrm{Max}(k, 1)$ gesetzt wurde; aus $\tilde{o}_k \notin G'''_0$ folgt $L'_m \neq L''_m$], ferner $\langle G'_0 \| \tilde{q}_n \rangle = M'_{n-1,3}$ und $\langle G''_0 \| \tilde{q}_n \rangle = M''_{n-1,3}$; die Richtigkeit der Indizierung im Sinne unserer Verabredung ergibt sich ebenso wie die entsprechende im vorigen Paragraphen. Außer $\tilde{q}_n$ enthalten $M'_{n-1,3}$ und $M''_{n-1,3}$ keinen Punkt aus P_n. Mithin ist $L'_m \frown M'_{n-1,3} = \tilde{q}'_{r'}$ und $L''_m \frown M''_{n-1,3} = \tilde{q}''_{r''}$, wobei (o. B. d. A.) $n < r'' \leqq r'$

ist. Wegen dieser Ungleichung ist $M'_{n-1,3}$ eine der beiden erzeugenden Geraden von $\tilde{q}'_{r'}$. Sei nun $\tilde{q}'_{r'}=\{M'_{n-1,3}, S_t\}$ $(t<r')$. Ist zufällig $S_t \| G'''_0$, so ändern wir G'''_0 so ab, daß es nicht mehr zu S_t parallel ist, ohne die anderen Eigenschaften von G'''_0 zu verletzen; dies ist wegen (B) möglich. O.B.d.A. sei also $S_t \nparallel G'''_0$. Dann ist $\langle G'''_0 \| \tilde{q}'_{r'} \rangle = M'''_{r'-1,3}$ mit richtiger Indizierung. Außer $\tilde{q}'_{r'}$ liegt kein Punkt von $M'''_{r'-1,3}$ in $P_{r'}$, also ist $M'''_{r'-1,3} \cap M''_{n-1,3} = \tilde{q}_{r'+1} \neq \tilde{q}''_{r''}$, letzteres wegen $r''<r'+1$. Aus $p_0^\sigma = \tilde{q}_n$ für eine Streckung σ von $\mathscr{A}$ würde aber $p_1^{''\sigma} = \tilde{q}''_{r''} = \tilde{q}_{r'+1}$ folgen, im Widerspruch zu dem eben gezeigten. Also gilt $P_0^\sigma \subseteq P_0$, ebenso $P_0^{\sigma-1} \subseteq P_0$, d.h. Hilfssatz 6.1.

2. HILFSSATZ 6.2. *Ein nicht in P_0 gelegener Punkt von $\mathscr{A}$ ist niemals Zentrum einer nichtidentischen Streckung von $\mathscr{A}$.*

BEWEIS. Sei $o \notin P_0$ Zentrum einer Streckung σ von $\mathscr{A}$. Nach Hilfssatz 6.1 induziert σ in $\mathfrak{p}_0$ eine Translation σ^*. Die eindeutige Fortsetzung von σ^* auf $\mathscr{A}$ ist aber nach Satz 5.1 andererseits eine Translation auf $\mathscr{A}$, die natürlich (vgl. I, Satz 4.1) mit σ übereinstimmt. Dies ist aber nur für $\sigma = \underline{1}$ möglich.

3. Jede affin-axiale Kollineation von $\mathscr{A}$ ist entweder eine Translation oder eine Streckung. Jede Translation bzw. Streckung von $\mathscr{A}$ induziert in $\mathfrak{p}_0$ eine Translation bzw. Streckung. Umgekehrt läßt sich jede affin-axiale Kollineation, d.h. Translation oder Streckung von $\mathfrak{p}_0$ eindeutig zu einer Translation oder Streckung auf $\mathfrak{p}_1$ (vgl. Hilfssatz 4.3 einschließlich Fußnote) und somit fortfahrend auf $\mathscr{A}$ fortsetzen. In Verallgemeinerung von Satz 5.1 gilt demnach:

SATZ 6.1. *Die von einer zentralen Parallelstruktur $\mathfrak{p}_0$ erzeugte freie translationstreue Erweiterungsebene $\mathscr{A} = [\mathfrak{p}_0]$ ist eine treue Erweiterung hinsichtlich der Gruppe der affin-axialen Kollineationen, d.h.: Jede affin-axiale Kollineation von $\mathscr{A}$ induziert in $\mathfrak{p}_0$ eine affin-axiale Kollineation, und umgekehrt gibt es zu jeder affin-axialen Kollineation π von $\mathfrak{p}_0$ eindeutig eine affin-axiale Kollineation von $\mathscr{A}$, die π in $\mathfrak{p}_0$ induziert.*

Bei dieser eineindeutigen Zuordnung zwischen den affin-axialen Kollineationen von $\mathscr{A}$ und denen von $\mathfrak{p}_0$ entsprechen sich jeweils die Translationen und die Streckungen. Insbesondere ist kein außerhalb der Punktmenge P_0 von $\mathfrak{p}_0$ gelegener Punkt Zentrum einer nichtidentischen Streckung.

Literatur

ANDRÉ, J.: Über Perspektivitäten in endlichen affinen Ebenen. Arch. d. Math. **9**, 228–235 (1958, a).

— Sur quelques plans euclidiens avec un groupe de translations. Convegno Internazionale „Reticoli e geometrie proiettive", Palermo-Messina, p. 1–2 (1958, b).

HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229–277 (1943).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 24. Oktober 1960)

Miller, J. B.
Math. Zeitschr. 76, 257—269 (1961)

A class of series involving integral kernels. I

By
J. B. Miller

1. Introduction

One particular generalization of Fourier sine and cosine integral transforms is to transformations in $L^2(0, \infty)$ involving kernels of a certain class defined by G. N. Watson, which includes, as well as $2\sin 2\pi x$ and $2\cos 2\pi x$, the Hankel kernel $x^{\frac{1}{2}} J_\nu(x)$, kernels like $4K_0(4\pi x^{\frac{1}{2}}) - 2\pi Y_0(4\pi x^{\frac{1}{2}})$ and $J_0(2x^{\frac{1}{2}})$ which arise in summation formulae, associated kernel pairs like $x^{\frac{1}{2}} Y_\nu(x)$, $x^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{H}_\nu(x)$, the Hilbert-type kernel $2/\pi(1-x^2)$, and others. A kernel of the class is defined by simple properties of its Mellin transform.

In this paper I give a theory of series of the type

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(n x), \tag{1.1}$$

where K is such a kernel, as an analogous generalization of Fourier sine and cosine series; the theory will thus include these and Schlömilch series [1]) as special cases, as well as some summation formulae. The theory has several distinctive features. First, it is stated in terms of the interval $(0, \infty)$, whereas Fourier and Schlömilch series are for "arbitrary" functions defined over a finite interval only. Thus secondly, it follows intuitively that expansion of an arbitrary function $f(x)$ in the form (1.1) is not necessarily possible; f must be periodic, or have some equivalent property. Thirdly, convergence of the series is generally not possible in $L^2(0, \infty)$, the space in which the integral transforms are defined; it seems necessary instead to work in a certain Hilbert space $\mathscr{H}_{-1}$ which contains $L^2(0, \infty)$, and whose elements (called "sequence-functions") are generalized functions with some of the properties of distributions. Those sequence-functions which possess expansions are related to Fourier series through their Mellin transforms.

Among the examples which arise most simply from the theory are a number of summation formulae of the type considered by Oppenheim [2]), associated with Dirichlet series. This is because (1.1) corresponds to a relation

$$\mathfrak{F}(s) = \mathfrak{K}(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \tag{1.2}$$

between the Mellin transforms of F and K.

---

[1]) References to the literature are given in [2], §7.10.3.

[2]) [6]. See also [2], §17.11.

The paper begins with a summary (§2) of the definition and properties of $\mathscr{H}_{-1}$, which are discussed in greater detail in [5]. §3 deals with the relation between sequence-function and coefficients, §4 with the convergence of the series. In §5 the class of sequence-functions possessing expansions is characterized. In §6 we draw an analogy with Fourier series, showing that the K-transform of a K-series is a sum of delta sequence-functions. Some examples are given in §7.

2. Notation and preliminary results

We write $f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, and say that $f \in \mathscr{G}_{-1}$ if $x^{-1} f^{(-1)}(x) \in L^2(0, \infty) \equiv L^2$. We write

$$(f, g)_{-1} = \int_0^\infty t^{-2} f^{(-1)}(t)\, \bar{g}^{(-1)}(t)\,dt, \qquad \|f\|_{-1} = \sqrt{(f, f)_{-1}}$$

for the scalar product and norm in $\mathscr{G}_{-1}$, which is an incomplete space. We denote by $\mathscr{H}_{-1}$ the Hilbert space which is the completion in norm of $\mathscr{G}_{-1}$; i.e. an element F of $\mathscr{H}_{-1}$ is a "sequence-function", definable by a class of equivalent Cauchy sequences (f_n), $f_n \in \mathscr{G}_{-1}$ (or even $f_n \in L^2$, since L^2 is dense in $\mathscr{G}_{-1}$) for $n = 1, 2, \ldots$, for which $\|f_n - f_m\|_{-1} \to 0$ as $\min(n, m) \to \infty$. Then $L^2 < \mathscr{G}_{-1} < \mathscr{H}_{-1}$. These spaces are described in [5]. We write $\lim_{(-1)}$ for a limit in $\mathscr{H}_{-1}$ norm.

The Mellin transform of $f(x)$ is $\mathfrak{F}(s)$, $s = \frac{1}{2} + it$, where

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \mathfrak{F}(s)\, x^{-s}\,ds.$$

If $f \in L^2(0, \infty)$, $\mathfrak{F}(\frac{1}{2} + it) \in L^2(-\infty, \infty)$; the integrals then converge in mean square. The Parseval relation for Mellin transforms, is

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} - i\infty} \mathfrak{F}(s)\, \mathfrak{G}(1 - s)\,ds, \tag{2.1}$$

and implies

$$\int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(\tfrac{1}{2} + it)|^2\,dt, \tag{2.2}$$

provided f is real. The Mellin transform of

$$x^{-1} f^{(-1)}(x) \quad \text{is} \quad \mathfrak{F}_{-1}(s) = (1 - s)^{-1} \mathfrak{F}(s).$$

These transforms are described in [7], pp. 94—5.

A Watson kernel[3]) is a sequence-function, K say, for which is defined indirectly a Mellin transform $\mathfrak{K}$ by

$$(1 - s)^{-1} \mathfrak{K}(s) = \operatorname*{l.i.m.}_{X \to \infty} \int_{1/X}^{X} x^{-1} K^{(-1)}(x) \cdot x^{s-1}\,dx, \tag{2.3}$$

[3]) See [7], Ch. VIII. Below we use simply the designation "kernel".

with the property

$$1/A^* \leqq |\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}+it)| \leqq A \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{2.4}$$

for some positive constants A, A^*. There will then exist an associated kernel K^*, determined by its Mellin transform $\mathfrak{K}^*$ by

$$\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}+it)\,\mathfrak{K}^*(\tfrac{1}{2}-it) = 1. \tag{2.5}$$

The kernel pair gives rise to a reciprocity

$$g(x) = \int_0^\infty K(xt) f(t)\,dt, \qquad f(x) = \int_0^\infty K^*(xt)\, g(t)\,dt.$$

The precise sense in which these transform relations exist is discussed in [5], §11. Some important cases are included if furthermore we suppose

$$|\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}+it)| = |\mathfrak{K}^*(\tfrac{1}{2}+it)| = 1, \tag{2.6}$$

so that K and K^* are complex conjugates. It is clear from the properties of Mellin transforms that (2.4) implies the convergence in L^2 of the integral in (2.3), so that necessarily $K \in \mathscr{H}_{-1}$.

A Watson kernel satisfies the integral formula

$$\int_0^\infty (nx)^{-1} K^{(-1)}(nx) \cdot (mx)^{-1} K^{*(-1)}(mx)\,dx = [\max(n,m)]^{-1}; \tag{2.7}$$

for by (2.1) and (2.5) the lefthand side equals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{n^{-s}\mathfrak{K}(s)}{1-s}\,\frac{m^{s-1}\mathfrak{K}^*(1-s)}{s}\,ds = \frac{1}{m}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(n/m)^{-s}}{s(1-s)}\,ds$$

which equals the righthand side. If we abbreviate $K(mx)$ to K_m, (2.7) becomes

$$(K_n, \bar{K}_m^*)_{-1} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(n/m)^{-s}}{s(1-s)}\,ds = [\max(n,m)]^{-1}. \tag{2.8}$$

When (2.6) holds, we can replace $\bar{K}_m^*$ here by K_m.

3. The series $\sum a_n K_n$; formulae for the ceofficients

Let K be a given kernel of $\mathscr{H}_{-1}$. Suppose that the sequence of numbers $\{a_n\}$ is such that as $N \to \infty$ the sequence-function

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n K(nx) \tag{3.1}$$

converges in $\mathscr{H}_{-1}$, to P say. The sum P is uniquely determined by the coefficients and the kernel, by the definition of $\mathscr{H}_{-1}$. Conversely, if P and the kernel are known, the coefficients can be determined, in the following manner.

Since the scalar product in $\mathscr{H}_{-1}$ is continuous,

$$(3.2)\qquad \begin{cases} (P, \bar{K}_m^*)_{-1} = \lim\limits_{N\to\infty} (P_N, \bar{K}_m^*)_{-1} \\ \qquad = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n (K_n, \bar{K}_m^*)_{-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n [\max(n, m)]^{-1}. \end{cases}$$

Let

$$\sigma_m = (P, \bar{K}_m^*)_{-1} \qquad (m \geqq 1), \qquad \sigma_0 = 0.$$

Then

$$\sigma_m = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

whence

$$\sigma_{m-1} - \sigma_m = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_n \qquad (m \geqq 2),$$

and

$$(3.3)\qquad \frac{a_m}{m} = 2m\sigma_m - (m-1)\sigma_{m-1} - (m+1)\sigma_{m+1} \qquad (m \geqq 1).$$

These equations suggest some alternate formal procedures. If the expression (3.3) is substituted in $P = \sum a_n K_n$ and a formal rearrangement made in the series, we find

$$P = \sum m\sigma_m \{2m K_m - (m+1) K_{m+1} - (m-1) K_{m-1}\}.$$

If fact, if

$$L_m = m\{2m\bar{K}_m^* - (m+1)\bar{K}_{m+1}^* - (m-1)\bar{K}_{m-1}^*\} \quad (m \geqq 2),$$
$$L_1 = 2(\bar{K}_1^* - \bar{K}_2^*),$$

it is easily verified from (2.8) that

$$(K_n, L_m)_{-1} = 1 \quad (n = m), \quad 0 \quad (n \neq m) \qquad (m, n \geqq 1),$$

i.e. that $\{K_n\}$, $\{L_n\}$ form a pair of binormal sequences in $\mathscr{H}_{-1}$, and the preceding calculation takes the form

$$(P, L_m)_{-1} = (\sum a_n K_n, L_m)_{-1} = \sum a_n (K_n, L_m)_{-1} = a_m.$$

A third possible procedure if $K = \bar{K}^*$ is to show from (2.8) that $\{M_n\}$ where

$$M_m = m K_m - (m-1) K_{m-1} \qquad (m \geqq 2), \qquad M_1 = K_1$$

forms an orthonormal set in $\mathscr{H}_{-1}$, and from an expansion $P = \sum b_n M_n$ derive $b_m = (P, M_m)_{-1}$. We shall confine our attention to the form of series (3.1).

We note the Parseval-type formula

$$(3.4)\qquad (P, \bar{P}^*)_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma_n,$$

whose proof is a simple consequence of the continuity of the scalar product:

$$(P, \bar{P}^*)_{-1} = \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{a_n a_m}{\max(n, m)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \sigma_n.$$

4. Convergence of the series

The convergence of the series $\sum a_n K_n$ *in* $\mathscr{H}_{-1}$ *is a property of the sequence* $\{a_n\}$, *and does not depend upon the kernel, provided* (2.6) *holds.* For let P_N be the partial sum (3.1); it converges to a limit in $\mathscr{H}_1$ if and only if $\{P_N\}$ is a Cauchy sequence, and for $M<N$ we have

$$(4.1)\qquad \left\{\begin{aligned} \|P_N - P_M\|^2_{-1} &= \Big(\sum_{M+1}^{N} a_n K_n,\ \sum_{M+1}^{N} a_m K_m\Big)_{-1} \\ &= \sum_{M+1}^{N}\sum_{M+1}^{N} \frac{a_n \bar{a}_m}{\max(n,m)} \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} \left\{\frac{a_n}{n}\sum_{m=M+1}^{n} \bar{a}_m + \frac{\bar{a}_n}{n}\sum_{m=M+1}^{n} a_m - \frac{|a_n|^2}{n}\right\}. \end{aligned}\right.$$

We shall call a sequence $\{a_n\}$ for which this sum approaches zero as $M\to\infty$, uniformly with N $(>M)$ a "w-sequence"; *if* (2.6) *holds, the series* $\sum a_n K_n$ *converges in* $\mathscr{H}_{-1}$ *if and only if* $\{a_n\}$ *is a* w*-sequence.*

It is easily seen, by writing $1\leqq n^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}$ in the inside sums of (4.1) (with moduli), that

$$(4.2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n^{-\frac{1}{2}} < \infty$$

is a sufficient condition for $\{a_n\}$ to be a w-sequence. This condition may be improved a little, as we now show.

THEOREM 1. *A set of sufficient conditions for* $\{a_n\}$ *to be a* w*-sequence is:*

(i) *the abscissa of absolute convergence* $\bar{\sigma}$ *of the Dirichlet series*

$$(4.3)\qquad \alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (s=\sigma+it)$$

is less than 1;

(ii) *there exists a real number* c, $\bar{\sigma}<c<1$, *such that* $\alpha(s)$ *may be continued analytically into the region* $\sigma\geqq 1-c$, *the function* $\alpha(s)$ *having no singularities in the finite part of the strip* $1-c\leqq\sigma\leqq c$;

(iii) $\alpha(\sigma+it)=o(|t|^2)$ *as* $t\to\pm\infty$, *uniformly for* $1-c\leqq\sigma\leqq c$, *and* $\alpha(1-c+it)=O(|t|^{1-\varepsilon})$ *as* $t\to\pm\infty$, *for some positive* ε.

PROOF. From the previous discussion, we may assume $\bar{\sigma}>\frac{1}{2}$. Write $\bar{\alpha}(s)$ for $\sum \bar{a}_n n^{-s}$, and

$$S_{N,M} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n \bar{a}_m [\max(n,m)]^{-1}.$$

It will be sufficient if $S_{N,M}$ tends to a limit as $\min(N,M)\to\infty$. Now from (2.8),

$$(4.4)\qquad \left\{\begin{aligned} S_{N,M} &= \sum_{1}^{N}\sum_{1}^{M} \frac{a_n\bar{a}_m}{m}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(n/m)^{-s}}{s(1-s)}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\alpha_N(s)\,\bar{\alpha}_M(1-s)}{s(1-s)}\,ds \end{aligned}\right.$$

where α_N denotes a partial sum. Consider the integral of the same integrand taken around the rectangle with vertices $\frac{1}{2} \pm iT$, $c \pm iT$. The integrand is analytic within the contour, and the integrals along the two lines $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq c$ both tend to zero as $T \to \infty$; thus (4.4) is valid with $\frac{1}{2}$ replaced by c. Then as $N \to \infty$, $S_{N,M}$ tends by dominated convergence to

$$S_M = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\alpha(s)\,\overline{\alpha}_M(1-s)}{s(1-s)}\,ds.$$

Now the conditions (ii) and (iii) on $\alpha(s)$ permit the contour to be moved back to $\sigma = 1-c$, in the same way; in fact,

$$\left| \int_{1-c+iT}^{c+iT} \right| = O\left(|T|^{-2}\right) \sum_1^M |a_n|\, n^{c-1} \int_{1-c}^{c} |\alpha(\sigma + iT)|\,d\sigma = o(1)$$

as $T \to \pm\infty$, by (iii). The integral along $\sigma = 1-c$ so obtained converges absolutely:

$$\left| \int_{1-c-iT}^{1-c+iT} \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} O\left(\frac{1}{1+|t|^2}\right) O\left(|t|^{1-\varepsilon}\right) dt \cdot \sum_1^\infty |a_n|\, n^{-c} < \infty.$$

Hence by dominated convergence again, S_M tends to a limit as $M \to \infty$. The result follows. The theorem gives no additional information if $a_n \geqq 0$ for all n, for then $\alpha(s)$ has a singularity at $s = \bar{\sigma}$, and (ii) cannot hold.

We summarize this and the last section in

THEOREM 2. *Given a kernel K for which* (2.6) *holds, there is a one-to-one correspondence between w-sequences $\{a_n\}$ and sequence-functions P of $\mathscr{H}_{-1}$ which are expandible as K-series $\sum a_n K_n$.*

5. The K-series of an arbitrary sequence-function

It is easily seen from examples that the K_n do not in general form a complete set in $\mathscr{H}_{-1}$, so that an arbitrary sequence-function F is not necessarily expandible in a K-series. Suppose that (2.6) holds, and that the K_n generate the linear subspace $\mathscr{P}$, with orthogonal complement $\mathscr{Q}$ in $\mathscr{H}_{-1}$. For F we can write $F = P + Q$, $P \in \mathscr{P}$, $Q \in \mathscr{Q}$, so that $P = \sum a_n K_n$ for a sequence $\{a_n\}$ determined by

$$\sigma_n = (P, K_n)_{-1} = (F, K_n)_{-1} \quad (n \geqq 1), \qquad \sigma_0 = 0.$$

We can call $\{a_n\}$ the sequence of "K-coefficients" of F if the a_n satisfy (3.2), i.e. if

$$(F, K_m)_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\max(n, m)]^{-1},$$

and $\sum a_n K_n$ the "K-series" of F, writing $F \sim \sum a_n K_n$. The work of §3 shows that the K-coefficients and K-series are uniquely determined. In place of (3.4) we have $\|F\|^2_{-1} \geqq \sum a_n \bar{\sigma}_n$. Clearly, the K-coefficients of an arbitrary sequence-function form a w-sequence. This process fails if (2.6) does not hold.

We now give a characterization of sequence-functions of $\mathscr{P}$ in terms of Fourier series. Let $\{a_n\}$ be an arbitrary real w-sequence, K a real kernel, and let P_N (defined by (3.1)) converge in $\mathscr{H}_{-1}$ to P. The Mellin transform of $x^{-1} P_N^{(-1)}(x)$ is

$$\mathfrak{P}_{N,-1}(s) = \sum_1^N a_n n^{-s} (1-s)^{-1} \mathfrak{K}(s),$$

and $\mathfrak{P}_{N,-1}(\frac{1}{2}+it)$ converges in $L^2(-\infty, \infty)$ to the Mellin transform $\mathfrak{P}_{-1}(s)$ of $x^{-1} P^{(-1)}(x)$[4]:

$$\mathfrak{P}_{-1}(s) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} (1-s)^{-1} \mathfrak{K}(s) \cdot \sum_1^N a_n n^{-s}.$$

Now the Mellin transform of

$$(nx)^{-1} \sin nx \quad \text{is} \quad -\Gamma(s-1) \cos \tfrac{1}{2} s\pi \cdot n^{-s},$$

and so

$$(1-s)^{-1} \Gamma(s) \cos \tfrac{1}{2} s\pi \cdot \sum_1^N a_n n^{-s} = \int_0^\infty \left\{ \sum_1^N a_n (nx)^{-1} \cos^{(-1)}(nx) \right\} x^{s-1} dx.$$

Then, since $|\Gamma(s) \cos \frac{1}{2} s\pi|$ is constant on $\sigma = \frac{1}{2}$, we have

$$(5.1)\quad \mathfrak{P}_{-1}(s)\, \mathfrak{K}^*(1-s)\, \Gamma(s) \cos \tfrac{1}{2} s\pi = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^\infty \left\{ \sum_1^N a_n (nx)^{-1} \cos^{(-1)}(nx) \right\} x^{s-1} dx.$$

But since $\{a_n\}$ is a w-sequence, the sum under the integral sign converges in L^2; and it also converges pointwise. The righthand side may therefore be written as the L^2 Mellin transform of the infinite series.

The argument is reversible. We have

THEOREM 3. *A necessary and sufficient condition that a sequence-function F of $\mathscr{H}_{-1}$ be expandible in the form*

$$F(x) = \lim_{N\to\infty (-1)} \sum_1^N a_n K(nx)$$

for a given kernel K of $\mathscr{H}_{-1}$ is that

$$\mathfrak{F}_{-1}(s)\, \mathfrak{K}^*(1-s)\, \Gamma(s) \cos \tfrac{1}{2} s\pi$$

be the L^2 Mellin transform of the integrated Fourier series

$$\sum_1^\infty a_n (nx)^{-1} \cos^{(-1)}(nx),$$

where $\{a_n\}$ is a w-sequence.

---

[4]) We use (2.2); hence the necessity that P_N be real.

A similar relation connects $\mathfrak{F}_{-1}(s)\,\mathfrak{K}^*(1-s)\,\Gamma(s)\sin\frac{1}{2}s\pi$ with a sine series. The Mellin transform relation in either case is equivalent to (1.2), interpreted as

$$\mathfrak{F}_{-1}(s) = (1-s)^{-1}\,\mathfrak{F}(s) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,(1-s)^{-1}\,\mathfrak{K}(s)\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}.$$

In this sense, (1.2) gives an alternate characterization of the space $\mathscr{P}$ of sequence-functions developable in series form.

6. The K-transform of a K-series

Just as in Schwartz' spaces of distributions the Fourier transform of a Fourier series is a sum of delta distributions[5]), so here the K-transform of a K-series is a sum of delta sequence-functions.

To prove this, we consider first the case when the kernel is a real principal sequence-function k (i.e. $k\in\mathscr{G}_{-1}$), and $k^*=k$. It is known ([5], §10) that

$$\delta_n(x,\xi) = \int_0^n k(xt)\,k(\xi t)\,dt \qquad (\xi>0)$$

converges in $\mathscr{H}_{-1}$ to a delta sequence-function Δ_ξ if (i) $\int_x^\infty t^{-1}k(t)\,dt = o(x^{-\frac{1}{2}})$ as $x\to\infty$, and (ii) $k(x)\in L^2(0,X)$, $k(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\in L(0,X)$ for all positive X.

We obtain a sequence (φ_n), $\varphi_n\in L^2$, for k by taking

$$\varphi_n(x) = k(x) \qquad (0<x<n),\quad 0 \quad (x>n).$$

For then $\varphi_n\in L^2$ for all n, by (ii), and its k-transform is

$$\underset{X\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^X \varphi_n(t)\,k(xt)\,dt = \delta_n(x,1).$$

Also, since $\|\delta_n(x,1)-\Delta_1(x)\|_{-1}\to 0$ as $n\to\infty$,

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_{-1} = \|\delta_n(x,1)-\delta_m(x,1)\|_{-1}\to 0 \qquad (n,m\to\infty)\,[6]),$$

and so (φ_n) defines a sequence-function in $\mathscr{H}_{-1}$. Now if $m<n$,

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2_{-1} = \int_m^n x^{-2}\left|\int_m^x k(t)\,dt\right|^2 dx + \int_n^\infty x^{-2}\left|\int_m^n k(t)\,dt\right|^2 dx.$$

Each term on the righthand side must approach zero; thus

$$\|k-\varphi_m\|^2_{-1} = \int_m^\infty x^{-2}\left|\int_m^x k(t)\,dt\right|^2 dx\to 0 \qquad (m\to\infty),$$

and hence (φ_m) determines the sequence-function k.

Let T be the transformation

$$T\{f,x\} = \underset{X\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^X f(t)\,k(xt)\,dt,$$

---

[5]) Cf. [4], p. 58.

[6]) By the Parseval relation $\|f\|_1 = \|Tf\|_{-1}$ for a kernel related to k (T as defined below); see [5], (11.5).

mapping L^2 onto itself, and let T_{-1} be its extension to $\mathscr{H}_{-1}$, defined by continuity ([5], §11). Then

$$T_{-1}\{k(mt), x\} = \lim_{n\to\infty\,(-1)} T\{\varphi_n(mt), x\}$$
$$= \lim_{n\to\infty\,(-1)} \int_0^{n/m} k(mt)\, k(xt)\, dt = \Delta_m(x).$$

Let $\phi_N = \sum_1^N a_m k(mx)$ converge in $\mathscr{H}_{-1}$ to P. Then

$$T_{-1}(P) = \lim_{N\to\infty\,(-1)} T_{-1}(\phi_N) = \lim_{N\to\infty\,(-1)} \sum_1^N a_m \Delta_m.$$

We have

THEOREM 4. *If k is a real kernel, for which $k^* = k$, and satisfying* (i) *and* (ii) *above, the k-transform of*

$$\sum_1^\infty a_m k(mx) \quad \textit{is} \quad \sum_1^\infty a_m \Delta_m(x).$$

To obtain a similar result for an arbitrary real kernel K we must work differently, since the previous sequence for Δ_ξ is no longer defined. We take a new sequence (ψ_n) for K, defining ψ_n through its Mellin transform

$$\Psi_n(s) = \mathfrak{K}(s) \quad (|t| < n), \quad 0 \quad (|t| > n) \quad (s = \tfrac{1}{2} + it).$$

Then ψ_n is real and belongs to L^2 for each n; (2.2) shows that $\|\psi_n - K\|_{-1} \to 0$. If χ_n is the K^*-transform of ψ_n, its Mellin transform is, by (2.5),

$$\Psi_n(1-s)\, \mathfrak{K}^*(s) = 1 \quad (|t| < n), \quad 0 \quad (|t| > n).$$

Now the Mellin transform of $x^{-1}\Delta_m^{(-1)}(x) = x^{-1}(x > m)$, 0 $(0 < x < m)$ is $m^{s-1}(1-s)^{-1}$.[7] Thus by (2.2) again,

$$\left\| \frac{1}{m}\chi_n\left(\frac{x}{m}\right) - \Delta_m(x) \right\|_{-1}^2 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-n} + \int_n^\infty\right\} |(1-s)^{-1} m^{s-1}|^2\, dt \to 0.$$

Then

$$T_{-1}^*\{K_m, x\} = \lim_{n\to\infty\,(-1)} T^*\{\psi_n(mt), x\}$$
$$= \lim_{n\to\infty\,(-1)} \frac{1}{m}\chi_n\left(\frac{x}{m}\right) = \Delta_m(x),$$

and we find

$$T_{-1}^*\left\{\sum_1^\infty a_m K_m\right\} = \sum_1^\infty a_m \Delta_m.$$

7. Examples

1°. *Fourier series.* Take $k(x) = 2\cos 2\pi x$; the series $\sum a_n 2\cos 2n x$, if it converges pointwise, defines a function $p(x)$ say, both $p(x)$ and $p^{(-1)}(x)$ having period 1, and the relation

(7.1) $$p^{(-1)}(x) = p^{(-1)}(1-x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

[7]) Cf. [5], Theorem 5.

holding. Conversely, if f is a function having the same properties, then a_m as given by (3.3) is equal to the usual Fourier coefficient: we obtain the identity (which can be proved independently)

$$a_m = \frac{4m}{\pi} \int_0^\infty x^{-2} f^{(-1)}(x) \sin^2 \pi x \sin 2\pi m x \, dx = \int_0^1 f(x) \cos 2\pi m x \, dx .$$

Similarly, for periodic functions satisfying $f^{(-1)}(x) = -f^{(-1)}(1-x)$ for $0 \leqq x \leqq 1$, instead of (7.1), we find

$$-\frac{4m}{\pi} \int_0^\infty x^{-2} f^{(-1)}(x) \sin^2 \pi x \cos 2\pi m x \, dx = \int_0^1 f(x) \sin 2\pi m x \, dx .$$

2⁰. A function f equal to the sum of its k-series is, by (1.2), closely associated with the Dirichlet series $\alpha(s) = \sum a_n n^{-s}$; the form of the more obvious examples is dictated by this series.

Consider the kernel

$$k(x) = 4K_0(4\pi x^{\frac{1}{2}}) - 2\pi Y_0(4\pi x^{\frac{1}{2}}), \quad \text{for which} \quad \mathfrak{R}(s) = \frac{\zeta^2(1-s)}{\zeta^2(s)} .$$

Now by using the functional equation of the Riemann zeta function $\zeta(s)$, we can show that

$$(2\pi)^4 \frac{\zeta^2(-s-1)}{s^2(1+s)^2} = \frac{\zeta^2(1-s)}{\zeta^2(s)} \cdot \zeta^2(s+2) .$$

This has the form (1.2), with [8])

$$\alpha(s) = \zeta^2(s+2) = \sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^2} n^{-s} \qquad \big(\mathfrak{R}(s) > -1\big);$$

here $d(n)$ is the number of divisors of n, $\{d(n)\, n^{-2}\}$ is a w-sequence, and therefore $F \in \mathscr{H}_{-1}$. Thus

$$x^{-1} F^{(-1)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathfrak{F}(s)}{1-s} x^{-s} \, ds$$

$$= (2\pi)^4 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\zeta^2(-s-1)\, x^{-s}}{s^2(1+s)^2(1-s)} \, ds .$$

To evaluate this integral we first put $s = 1-z$, and then move the contour to the right; this can be justified by using known uniform order relations for $\zeta(s)$ [9]). We obtain

$$\frac{x^{-1} F^{(-1)}(x)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta^2(z-2)\, x^{z-1}}{(1-z)^2 (2-z)^2 z} \, dz - R ,$$

where c is taken so large that $\sum d(n)\, n^{2-c}$ converges, i.e. $c > 3$, and R is the sum of the residues of the integrand at $z = 1$, 2 and 3. Term-by-term

[8]) For properties of the arithmetic functions $d(n)$ and $r(n)$ see [2], Ch. XVII.

[9]) Cf. [8], Ch. I.

integration of the series obtained by substituting for $\zeta^2(z-2)$ gives for the integral

$$(4x)^{-1}\sum_{n\leq x} d(n)\{n^2+4nx-5x^2+2x(2n+x)\log(x/n)\},$$

and

$$R=\frac{1}{144}(1+18x+12x^2)\log x+\frac{1-24\zeta'(-1)}{144}+$$
$$+\frac{x}{16}(4\log 2\pi-5)+\frac{x^2}{18}(3\gamma-5).$$

Thus $F^{(1)}(x)$ is absolutely continuous, and $F^{(1)}(0+)=0$; by differentiation we obtain the relation

$$(7.2)\quad \begin{cases} -\sum_{1\leq n\leq x} d(n)\{2(x-n)+(x+n)\log(n/x)\}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{36}+x+x^2\right)\log x+ \\ \quad +\frac{12\zeta'(-1)-1}{72}+\frac{x}{2}(1-\log 2\pi)+\frac{x^2}{4}(3-2\gamma) \\ =(2\pi)^{-4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d(m)}{m^2}\left[4K_0\left(4\pi(mx)^{\frac{1}{2}}\right)-2\pi Y_0\left(4\pi(mx)^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \end{cases}$$

3^0. The Dirichlet series $L(s)=1^{-s}-3^{-s}+5^{-s}-\cdots$ satisfies the functional equation

$$L(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}2^{1-2s}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s)}L(1-s);$$

hence if

$$\alpha(s)=4\zeta(s+1)L(s+1)=\sum_1^{\infty}\left(r(n)/n\right)n^{-s}\qquad(\Re(s)>0),$$

where $r(n)$ is the number of representations of n as a sum of two squares, we can deduce

$$-\pi^2\frac{\alpha(-1-s)}{s^2}=\pi^{1-2s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\cdot\alpha(s).$$

From this identity as a form of (1.2) we derive the relation

$$(7.3)\quad \begin{cases} \sum_{1\leq n\leq x} r(n)\log(n/x)-\log x-\log 2\pi-2L'(0)+\pi x \\ \qquad =\pi^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,m^{-1}J_0\left(2\pi(mx)^{\frac{1}{2}}\right). \end{cases}$$

In examples 2^0 and 3^0, the series converge in the first instance in the norm of $\mathscr{H}_{-1}$; but they also converge pointwise, and (7.2) and (7.3) hold for all positive x. In each case, (4.2) holds for the sequence $\{a_n\}$. A formal differentiation of (7.3) gives Voronöi's identity.

4^0. There are other examples in the same vein as 2^0 and 3^0. The method was used by APOSTOL [10]) to prove Landau's identity,

$$(7.4)\quad \begin{cases} \frac{1}{q!}\sum_{0\leq n\leq x} a(n)(x-n)^q=\frac{\varrho\,\Gamma(\varkappa)}{\Gamma(\varkappa+q+1)}x^{\varkappa+q}+ \\ \qquad +\gamma\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^q x^{\frac{1}{2}(\varkappa+q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\frac{1}{2}(\varkappa+q)}}J_{\varkappa+q}\left(\frac{4\pi}{\lambda}(nx)^{\frac{1}{2}}\right); \end{cases}$$

[10]) [1]; $\gamma=\pm 1$, $a(0)=-\varphi(0)$, q is a positive integer.

where $\sum a(n)n^{-s}$ is assumed to converge absolutely for $\sigma > \varkappa$, defining a function $\varphi(s)$, analytic except possibly for a simple pole at $s=\varkappa$ with residue ϱ, which satisfies

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\varphi(s) = \gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{s-\varkappa}\Gamma(\varkappa - s)\,\varphi(\varkappa - s). \tag{7.5}$$

Here

$$a_n = a(n)\,n^{-\frac{1}{2}(\varkappa+q)}, \quad k(x) = k^*(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\,J_{\varkappa+q}\left(\frac{4\pi}{\lambda}\,x^{\frac{1}{2}}\right),$$

and (7.5) shows that (1.2) has the form

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q+1}\frac{\alpha(-q-s)\,\Gamma(\frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}q - s)}{\Gamma(\frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}q + 1 - s)} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1-2s}\frac{\Gamma(s + \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}q)}{\Gamma(1 - s + \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}q)}\cdot\alpha(s).$$

The series in (7.4) converges absolutely if $q > \varkappa - \frac{1}{2}$; while (4.2) holds (so that $\{a_n\}$ is a w-sequence) if $q > \varkappa - 1$. For a sequence satisfying the conditions of Theorem 1 we may have convergence in $\mathscr{H}_{-1}$ for smaller q.

5⁰. Let $k(x) = x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x)$ and take $a_n = n^{-\nu-\frac{1}{2}}$. Then $\alpha(s) = \zeta(s+\nu+\frac{1}{2})$, and the functional equation of the Riemann zeta function shows that (1.2) can be written

$$2^{s-\frac{1}{2}}\pi^{s+\nu}\frac{\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s)}\,\zeta(\tfrac{1}{2} - s - \nu) = 2^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s)}\cdot\zeta(s + \nu + \tfrac{1}{2}),$$

By the method of 2⁰, we obtain the Schlömilch series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\nu-\frac{1}{2}}(nx)^{\frac{1}{2}}J_\nu(nx) = \frac{2^{1-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\,x^{\frac{1}{2}-\nu}\sum_{0 < 2\pi n \leqq x}(x^2 - 4\pi^2 n^2)^{\nu-\frac{1}{2}} + \\ + \frac{2^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\,x^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} - \frac{x^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu + 1)}.$$

This identity is also a case of Poisson's summation formula [11]. The series converges absolutely if $\nu > \frac{1}{2}$, and in $\mathscr{H}_{-1}$ if $\nu > 0$, since $\{a_n\}$ is then a w-sequence, by (4.2).

6⁰. The functional equation of $L(s)$ (3⁰) can be written

$$L(1 - s) = \mathfrak{S}(s)\,L(s), \tag{7.6}$$

where $\mathfrak{S}(s)$ is the Mellin transform of the kernel $\sin\frac{1}{2}\pi x$. With $\alpha(s) = L(s)$, $\{a_n\}$ is the w-sequence $1, 0, -1, 0, \ldots$ ((4.2) does not hold). Hence $F \in \mathscr{H}_{-1}$ and by the previous method we find

$$x^{-1}F^{(-1)}(x) = x^{-1}\sum_{1 \leqq 2n+1 < x}(-1)^n.$$

But (cf. §6), $x^{-1}\Delta_m^{(-1)}(x) = 0$ $(0 < x < m)$, x^{-1} $(x > m)$. Thus

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Delta_{2n+1}(x),$$

[11] Cf. [7], p. 65.

and we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta_{2n+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin(n + \tfrac{1}{2})\pi x.$$

Theorem 4 shows that this sequence-function is self-reciprocal with respect to the transformation with kernel $\sin \frac{1}{2}\pi x$, as (7.6) implies.

References

[1] Apostol, T. M.: Identities involving the coefficients of certain Dirichlet series. Duke Math. J. **18**, 517—525 (1951).

[2] Bateman Manuscript Project: Higher transcendental functions, Vols 2, 3. McGraw-Hill 1953, 1955.

[3] — Tables of integral transforms, Vol. 1. McGraw-Hill 1954.

[4] Lighthill, M. J.: Fourier analysis and generalized functions. Cambridge 1958.

[5] Miller, J. B.: Hilbert spaces of generalized functions extending $L^2(I)$. J. Aust. Math. Soc. **1**, 281—298 (1960).

[6] Oppenheim, A.: Some identities in the theory of numbers. Proc. London Math. Soc. **26**, 295—350 (1927).

[7] Titchmarsh, E. C.: Theory of Fourier integrals, 2nd ed. Oxford 1948.

[8] — The zeta-function of Riemann. Cambridge Tract No. 26. Cambridge 1930.

Australian National University, Canberra, A.C.T.

(Eingegangen am 28. Juni 1960)

MACDONALD, I. D.
Math. Zeitschr. 76, 270—282 (1961)

On Certain Varieties of Groups

By
I. D. MACDONALD

A variety is a class of groups defined by laws, or identical relations. Thus the abelian groups form the variety associated with the law

$$(x, y) = 1,$$

which is to be understood as holding good for any pair x, y of elements in each group of the variety.

The varieties discussed here are those associated with the laws

(a) $$(x, y_1, \ldots, y_n, x) = 1,$$

(b) $$(x, y_1, \ldots, y_n; x, z_1, \ldots, z_m) = 1$$

respectively, where m and n are fixed positive integers. We prove that the groups G of the variety (a) are nilpotent of class $n+2$ or less and that the term G_{n+1} of the lower central series has exponent 3 — a well-known result when $n=1$. For any group G of the variety (b) with $n \geqq m$, we are able to show that the term G_m of the lower central chain is nilpotent of class $n-m+2$ or less; therefore G is soluble. Additional results are proved in the cases $m=n=1$ and $m+1=n=2$.

Corresponding theorems would hold for varieties of Lie rings, the most interesting being the analogue of the lemma in §2. We do not state any of these results explicitly.

1. Notation and basic facts

The simple commutator $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in the group G is defined in the standard way:

$$(a_1, a_2) = a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2,$$

and for all $n > 2$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \big((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\big).$$

Further we shall put

$$(a_1, a_2; b_1, b_2) = \big(a_1, a_2, (b_1, b_2)\big).$$

The symbol 1 will denote the unit element or subgroup of whatever group G is under consideration, and for any elements a and b of G we use a^b for $b^{-1} a b$. Thus $(a, b) = a^{-1} a^b$.

The following list of commutator identities is also standard:

(1.1) $$(a, b)^{-1} = (b, a);$$

(1.2) $$(a, b) = (b, a^{-1})^a = (b^{-1}, a)^b;$$

(1.3) $$\begin{cases} (a\,b, c) = (a, c)^b\,(b, c), \\ (a, b\,c) = (a, c)\,(a, b)^c; \end{cases}$$

(1.4) $$(a\,b, c\,d) = (a, d)^b\,(b, d)\,(a, c)^{b\,d}\,(b, c)^d;$$

(1.5) $$(c, a^{-1}, b)^a\,(a, b^{-1}, c)^b\,(b, c^{-1}, a)^c = 1;$$

(1.6) $$(c, a, b)\,(a, b, c)\,(b, c, a) = (a, c)\,(b, c)\,(b, a)^c\,(c, a)\,(c, b)^a\,(a, b)^c\,(c, b)\,(b, c)^a.$$

Identity (1.3) can be extended as follows:

(1.7) $$(a\,b, c_1, \ldots, c_n) = \left(\ldots (a, c_1)^b, c_2\right)^{(b, c_1)}, \ldots, c_n\Big)^{(b, c_1, \ldots, c_{n-1})}(b, c_1, \ldots, c_n).$$

This form is easily established by induction. We shall also use another simple consequence of (1.3):

(1.8) $$(a, b)^c = (a, c)^{-1}\,(a, b\,c).$$

If H and K are subgroups of G then the subgroup generated by the commutators (h, k) for all $h \in H$ and all $k \in K$ is denoted by (H, K). The terms G_i of the lower central chain of G are defined by

$$G_0 = G, \qquad G_{n+1} = (G_n, G)$$

for all $n \geqq 0$. The commutator subgroup G_1 of G will usually be written as G'. The subgroup G'' is defined to be (G', G'). The centre of G will be called Z or, more explicitly, $Z(G)$.

2. The variety $(x, y_1, \ldots, y_n, x) = 1$

THEOREM 1. *Every group G of the variety with the law*

(2.1) $$(x, y_1, \ldots, y_n, x) = 1$$

where n is a fixed positive integer, has the properties

(i) *G is nilpotent of class $n+2$ or less; and*

(ii) *G_{n+1} has exponent three*[1]).

We note that this theorem is known for $n = 1$, being due to F. W. LEVI [2]. The proof is also to be found in the book [1] of M. HALL, pp. 321—2; and elsewhere. Further, for $n = 1$ examples of groups are known in which the class is just 3. We leave open the question whether the bound $n+2$ in (i) and the exponent three in (ii) are best possible.

LEVI'S result is to be used as the basis of an inductive proof of Theorem 1. In this the following lemma will be needed.

[1]) Since first submitting this paper I have noticed results of H. MEIER-WUNDERLI in „Über die Gruppen mit der identischen Relation $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ $(n \geqq 3)$", Vjschr. naturf. Ges. Zürich **94**, 211—218 (1949). Theorem 1 above seems to be a stronger version of them.

LEMMA. *In any group G the commutator $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ can be expressed as the product of 4^{n-1} commutators of the form $(b, a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)^{\pm 1}$ where each a_i^* is a conjugate of some $a_j^{\pm 1}$.*

PROOF [2]). We proceed by induction on n; the result for $n=1$ is given at once by (1.1). Suppose that the result is true for a fixed positive integer N, then we shall prove it in the case of the commutator $(a_1, \ldots, a_{N+1}, b)$.

Let us put $(a_1, \ldots, a_N) = c$. Identity (1.5) gives us

$$(c, a_{N+1}, b) = (b, c^{-1}, a_{N+1}^{-1})^{-c a_{N+1}} (a_{N+1}^{-1}, b^{-1}, c)^{-b a_{N+1}}. \tag{2.2}$$

But by (1.2)

$$(b, c^{-1}, a_{N+1}^{-1})^{-c a_{N+1}} = (c, b, a_{N+1}^{-c})^{-a_{N+1}}, \tag{2.3}$$

and by the inductive hypothesis

$$(c, b) = \prod_{i=1}^{2^{2N-2}} (b, a_{i1}, \ldots, a_{iN})^{\pm 1},$$

the a_{ij} being certain conjugates of the $a_k^{\pm 1}$. Repeated application of (1.3), (1.2), (1.1) and (1.8) will give

$$(c, b, a_{N+1}^{-c})^{-a_{N+1}} = \prod_{i=1}^{2^{2N-2}} (b, a'_{i1}, \ldots, a'_{i,N+1})^{\pm 1}, \tag{2.4}$$

where the a'_{ij} are certain conjugates of the $a_k^{\pm 1}$. We also have

$$\begin{cases} (a_{N+1}^{-1}, b^{-1}, c)^{-b a_{N+1}} = \big((b, a_{N+1}^{-1}), c^b\big)^{-a_{N+1}} \\ \qquad\qquad = \big(c^b, (b, a_{N+1}^{-1})\big)^{a_{N+1}} \end{cases} \tag{2.5}$$

by (1.2) and (1.1). The inductive hypothesis and (1.8) give

$$\begin{cases} \big(c^b, (b, a_{N+1}^{-1})\big)^{a_{N+1}} = \prod_{i=1}^{2^{2N-2}} \big((b, a_{N+1}^{-1}), a''_{i1}, \ldots, a''_{iN}\big)^{\pm a_{N+1}} \\ \qquad\qquad = \prod_{i=1}^{2^{2N-2}} (b, a_{i1}^*, \ldots, a_{i,N+1}^*)^{\pm 1}, \end{cases} \tag{2.6}$$

where the a''_{ij} and the a_{ij}^* are certain conjugates of the $a_k^{\pm 1}$.

Now (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) and (2.6) show that $(a_1, \ldots, a_{N+1}, b)$ is the product of 4^N commutators of the form $(b, a_1^*, \ldots, a_{N+1}^*)^{\pm 1}$ where the a_i^* are certain conjugates of the $a_j^{\pm 1}$.

This completes the inductive proof of the lemma.

PROOF OF THEOREM 1. First we verify that for all n (2.1) is equivalent to

$$\big((x, y_1, \ldots, y_n)^x, x\big) = 1. \tag{2.7}$$

For by (1.8)

$$\big((x, y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n\big)^x = \big((x, y_1, \ldots, y_{n-1}), z\big)^{-1} \big((x, y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n z\big),$$

and application of (2.1) gives (2.7) immediately.

[2]) Since first submitting this paper I have noticed a result of C. R. B. WRIGHT which contains the central idea of this proof. See "On groups of exponent four with generators of order two", Pacific Journal Math. **10**, 1097—1105 (1960), Lemma 3.2.

We now assume that when n is a fixed positive integer N the groups of the variety (2.1) have class $N+2$ or less; and consider a group G of the variety

(2.8) $$(x, y_1, \ldots, y_{N-1}, x) = 1 .$$

By (2.7) we have the law

(2.9) $$\left((x, y_1, \ldots, y_{N+1})^z, x\right) = 1 .$$

We put $x = uv$ in (2.8) and expand the resulting law

(2.10) $$(uv, y_1, \ldots, y_{N+1}, uv) = 1 .$$

By (1.7) we have

$$(uv, y_1, \ldots, y_{N+1}) = \left((\ldots (u, y_1)^v, \ldots, y_{N+1}\right)^{(v, y_1, \ldots, y_N)} (v, y_1, \ldots, y_{N+1}) .$$

Therefore

(2.11) $$(uv, y_1, \ldots, y_{N+1}, uv) = c_1 c_2 c_3 c_4$$

by (1.4), where

$$c_1 = \left(\ldots (u, y_1)^v, \ldots, y_{N-1}\right)^{(v, y_1, \ldots, y_N)}, v\Big)^{(v, y_1, \ldots, y_{N+1})},$$

$$c_2 = (v, y_1, \ldots, y_{N-1}, v) ,$$

$$c_3 = \left(\ldots (u, y_1)^v, \ldots, y_{N-1}\right)^{(v, y_1, \ldots, y_N)}, u\Big)^{(v, y_1, \ldots, y_{N+1})v},$$

$$c_4 = (v, y_1, \ldots, y_{N-1}, u)^v .$$

We can simplify the c_i with the aid of (2.9):

$$c_2 = c_3 = 1 ,$$

$$c_1 = \left(\ldots (u, y_1)^v, \ldots, y_{N+1}\right)^{(v, y_1, \ldots, y_N)}, v\Big) ,$$

$$c_4 = (v, y_1, \ldots, y_{N-1}, u) .$$

Now we rewrite (2.10) and (2.11) as[3])

(2.12) $$(v, y_1, \ldots, y_{N+1}, u) = (u', y_1', \ldots, y_{N+1}', v)^{-1},$$

where $u', y_1', \ldots, y_{N+1}'$ are certain conjugates of $u, y_1, \ldots, y_{N+1}$ respectively.

Put $y_{N+1} = v$ in (2.12). Because of the lemma $(u', y_1', \ldots, y_{N+1}')$ can be expressed as the product of conjugates of elements like $(v, w_1, \ldots, w_{N+1})^{\pm 1}$.

[3]) We could in fact simplify (2.12) by showing that $c_1 = (u, y_1, \ldots, y_{N+1}, v)$ and a similar result is proved after (3.5) below.

Hence, in Meier-Wunderli's variety the relations

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1)^{-1},$$

both hold. From these and the fact that

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^3 = 1 ,$$

it is possible to show that for even n exceeding 3

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 .$$

Then (2.9) shows that the right-hand side of (2.12) is 1, that is

$$(v, y_1, \ldots, y_N, v, u) = 1. \tag{2.13}$$

A group G with the law (2.13) has the property that $(v, y_1, \ldots, y_N, v)$ lies in the centre Z. In other words G/Z belongs to the variety (2.1), with $n=N$. As G/Z is nilpotent of class $N+2$ or less by the inductive hypothesis, G is nilpotent of class $N+3$ or less. Moreover by the inductive hypothesis G/Z satisfies the law

$$(z_1, \ldots, z_{N+2})^3 = 1$$

and so G satisfies

$$\left((z_1, \ldots, z_{N+2})^3, z\right) = 1. \tag{2.14}$$

On applying (1.3) and (2.9) to this we find that

$$(z_1, \ldots, z_{N+2}, z)^3 = 1. \tag{2.15}$$

Thus G_{N+2} has exponent 3, as it is central in G.

This completes the inductive proof of Theorem 1.

3. The variety $(x, y_1, \ldots, y_n;\ x, z_1, \ldots, z_m) = 1$

To establish the theorem of this section both the method of proof, and the result, of Theorem 1 will be used.

THEOREM 2. *Every group G of the variety with the law*

$$(x, y_1, \ldots, y_n;\ x, z_1, \ldots, z_m) = 1, \tag{3.1}$$

where $n \geqq m$ and $n > 1$, has G_m nilpotent of class $n-m+2$ or less.

PROOF. We note that (1.8) shows that (3.1) is equivalent to the law

$$\left((x, y_1, \ldots, y_n)^s, (x, z_1, \ldots, z_m)^t\right) = 1. \tag{3.2}$$

In this and later sections we shall use without explicit reference the fact that (3.1) implies

$$(x, y_1, \ldots, y_{n+p};\ x, z_1, \ldots, z_m) = 1$$

for all $p \geqq 0$, whether $n \geqq m$ or not. This is a consequence of (3.2) and the fact that $(x, y_1, \ldots, y_{n+p})$ can be written as the product of 2^p conjugates of the commutator $(x, y_1, \ldots, y_n)$ and its inverse.

The relation

$$(uv, y_1, \ldots, y_n;\ uv, z_1, \ldots, z_m) = 1, \tag{3.3}$$

derived from (3.1), has to be expanded in the way that (2.10) was expanded. For the sake of a later application we do not exclude the case $n=1$ yet. We note (1.7), then apply (1.4) to the left-hand side of (3.3):

$$(uv, y_1, \ldots, y_n;\ uv, z_1, \ldots, z_m) = c_1 c_2 c_3 c_4 \tag{3.4}$$

where

$$c_1 = \big((\dots (u, y_1)^v, \dots, y_n)^{(v, y_1, \dots, y_{n-1})}, (v, z_1, \dots, z_m)\big)^g,$$

$$c_2 = (v, y_1, \dots, y_n; v, z_1, \dots, z_m),$$

$$c_3 = \big((\dots (u, y_1)^v, \dots, y_n)^{(v, y_1, \dots, y_{n-1})}, (\dots (u, z_1)^v, \dots, z_m)^{(v, z_1, \dots, z_{m-1})}\big)^{gh},$$

$$c_4 = \big((v, y_1, \dots, y_n), (\dots (u, z_1)^v, \dots, z_m)^{(v, z_1, \dots, z_{m-1})}\big)^h,$$

$$g = (v, y_1, \dots, y_n),$$

$$h = (v, z_1, \dots, z_m).$$

With the aid of (3.2) we find easily that

$$c_2 = c_3 = 1,$$

$$c_1 = \big((\dots (u, y_1)^v, \dots, y_n)^{(v, y_1, \dots, y_{n-1})}, (v, z_1, \dots, z_m)\big),$$

$$c_4 = \big((v, y_1, \dots, y_n), (\dots (u, z_1)^v, \dots, z_m)^{(v, z_1, \dots, z_{m-1})}\big);$$

and by (3.3) and (3.4)

$$c_4 = c_1^{-1}. \tag{3.5}$$

The next step consists in showing that

$$c_4 = (v, y_1, \dots, y_n; u, z_1, \dots, z_m).$$

We have

$$c_4 = (v, y_1, \dots, y_n); \big((u, z_1)^{w_1}, z_2^{w_2}, \dots, z_m^{w_m}\big) \tag{3.6}$$

where we have introduced the abbreviations

$$v_1 = v, \qquad v_i = (v, z_1, \dots, z_{i-1})$$

for $2 \leqq i \leqq m$ and

$$w_i = v_i v_{i+1} \dots v_m$$

for $1 \leqq i \leqq m$. Suppose that for some i such that $1 \leqq i < m$ we have succeeded in showing that

$$c_4 = \big(v, y_1, \dots, y_n; ((u, z_1, \dots, z_i)^{w_i}, z_{i+1}^{w_{i+1}}, \dots, z_m^{w_m})\big). \tag{3.7}$$

Using the fact that $a^b = (b, a^{-1})\, a$ we find

$$\begin{aligned}(u, z_1, \dots, z_i)^{w_i} &= \big(v_i, (u, z_1, \dots, z_i)^{-1}\big)^{w_{i+1}} (u, z_1, \dots, z_i)^{w_{i+1}} \\ &= (u, z_1, \dots, z_i, v_i)^e\, (u, z_1, \dots, z_i)^{w_{i+1}}\end{aligned}$$

for a certain element e in G by (1.2). Now we apply (1.7):

$$\begin{aligned}&\big((u, z_1, \dots, z_i)^{w_i}, z_{i+1}^{w_{i+1}}, \dots, z_m^{w_m}\big) \\ &\qquad = (u', z_1', \dots, z_i', v_i', z_{i+1}', \dots, z_m')\, \big((u, z_1, \dots, z_i)^{w_{i+1}}, z_{i+1}^{w_{i+1}}, \dots, z_m^{w_m}\big).\end{aligned}$$

where x' denotes a certain conjugate of x. If we can show that $(v, y_1, \ldots, y_n)$ commutes with the first factor on the right-hand side of the last equality then by (3.7) and (1.3) we obtain

$$c_4 = \left(v, y_1, \ldots, y_n; \left((u, z_1, \ldots, z_i)^{w_{i+1}}, z_{i+1}^{w_{i+1}}, \ldots, z_m^{w_m}\right)\right). \tag{3.8}$$

But $(u', z_1', \ldots, z_i', v_i', z_{i+1}', \ldots, z_m')$ can be written as the product of commutators of the forms $(v_i', u^*, z_1^*, \ldots, z_m^*)^{\pm 1}$ by the lemma of §2 and (1.8), and so must commute with $(v, y_1, \ldots, y_n)$ by (3.2).

Compare (3.7) with (3.8). Induction on i at once gives

$$c_4 = \left(v, y_1, \ldots, y_n; (u, z_1, \ldots, z_m)^{w_m}\right); \tag{3.9}$$

but here as before

$$\begin{aligned}(u, z_1, \ldots, z_m)^{w_m} &= \left(v_m, (u, z_1, \ldots, z_m)^{-1}\right)(u, z_1, \ldots, z_m) \\ &= (u, z_1, \ldots, z_m, v_m)^f (u, z_1, \ldots, z_m)\end{aligned}$$

for a certain element f of G. Since we find that $(v, y_1, \ldots, y_n)$ and $(u, z_1, \ldots, z_m, v_m)$ commute, as we did in a similar case above, (3.9) and (1.3) give

$$c_4 = (v, y_1, \ldots, y_n; u, z_1, \ldots, z_m). \tag{3.10}$$

In the same way it can be shown that

$$c_1 = (u, y_1, \ldots, y_n; v, z_1, \ldots, z_m). \tag{3.11}$$

We rewrite (3.5) with the aid of (3.10) and (3.11):

$$(v, y_1, \ldots, y_n; u, z_1, \ldots, z_m) = (v, z_1, \ldots, z_m; u, y_1, \ldots, y_n). \tag{3.12}$$

Now suppose that $n > 1$ and that $y_n = v$ in (3.12). With the aid of the lemma of §2 we can express $(u, y_1, \ldots, y_{n-1}, v)$ as the product of commutators of the form $(v, y_1^*, \ldots, y_n^*)^{\pm 1}$. Then (3.2) shows that the right-hand side of (3.12) is 1, that is

$$(v, y_1, \ldots, y_{n-1}, v; u, z_1, \ldots, z_m) = 1. \tag{3.13}$$

Since $n \geqq m$ this states that in $G/Z(G_m)$ we have the law

$$(v, y_1, \ldots, y_{n-1}, v) = 1. \tag{3.14}$$

Apply Theorem 1. We see that $G/Z(G_m)$ is nilpotent of class $n+1$ or less, and so $G_m/Z(G_m)$ is certainly nilpotent of class no more than $n-m+1$. It follows that G_m is nilpotent of class $n-m+2$ or less.

This completes the proof of Theorem 2.

Note that our information about $G/Z(G_m)$ shows that G is an extension of an abelian group by a nilpotent group of class $n+1$ or less, so G is certainly soluble of length not exceeding $n+2$. We pass over the question whether the result of Theorem 2 is best possible.

4. The variety $(x, y; x, z) = 1$

The groups of this variety were excluded from the enunciation of Theorem 2. The metabelian groups, that is the variety with the law

$$(x, y; u, v) = 1$$

are closely related to our variety, perhaps more closely than might be expected; thus Theorem 3 shows that the groups of this variety are metabelian when they lack elements of order 2.

THEOREM 3. *Every group G of the variety associated with the law*

$$(x, y; x, z) = 1 \tag{4.1}$$

has the properties

(i) *G/Z is metabelian; and*

(ii) *G'' has exponent 2.*

PROOF. The law

$$\big((x, y)^u, (x, z)^v\big) = 1 \tag{4.2}$$

follows from (4.1) as (3.2) follows from (3.1). Several applications of (4.2) to (1.6) yield

$$(x, y, z)\,(y, z, x)\,(z, x, y) = 1. \tag{4.3}$$

Further (1.2) and (4.2) give

$$(x, y, z) = \big(z, (y, x)\big)^{(x, y)} = \big(z, (y, x)\big).$$

We shall require two consequences of this equality:

$$(x, y; u, v) = (u, v; y, x); \tag{4.4}$$

$$(x, y, z; u, v) = \big(z, (y, x); u, v\big). \tag{4.5}$$

Next we may quote (3.12) with $m = n = 1$ as we did not use the assumption $n > 1$ in proving (3.12). Thus

$$(x, y; u, v) = (x, v; u, y). \tag{4.6}$$

It is not difficult to deduce from (4.4) and (4.6) that the value of $(x, y; u, v)$ is unaltered under arbitrary permutation of x, y, u, v. Two consequences of this important fact are to be observed. Firstly

$$(x, y; u, v) = (u, v; x, y)$$

that is

$$(x, y; u, v)^2 = 1; \tag{4.7}$$

and secondly from (4.5) we have

$$(x, y, z; u, v) = (y, x, z; u, v). \tag{4.8}$$

Next we need another relation, which comes from expansion of the law

$$(x, yz; u, v) = (x, v; u, yz) \tag{4.9}$$

derived from (4.6). Thus by (1.3) and (4.2)

$$\begin{aligned}(x, yz; u, v) &= \big((x, z)\,(x, y)^z, (u, v)\big)\\ &= (x, z; u, v)^{(x,y)^z}\,\big((x, y)^z, (u, v)\big)\\ &= (x, z; u, v)\,\big((x, y)\,(x, y, z), (u, v)\big)\\ &= (x, z; u, v)\,(x, y; u, v)^{(x,y,z)}\,(x, y, z; u, v)\\ &= (x, z; u, v)\,(x, y; u, v)\,(x, y, z; u, v);\end{aligned}$$

and similarly

$$(x, v; u, yz) = (x, v; u, y, z)\,(x, v; u, y)\,(x, v; u, z).$$

Therefore (4.9) becomes

$$\begin{aligned}&(x, z; u, v)\,(x, y; u, v)\,(x, y, z; u, v)\\ &\qquad = (x, v; u, y, z)\,(x, v; u, y)\,(x, v; u, z).\end{aligned}$$

We may rearrange factors in the last equality by (4.2), and cancel certain of them by (4.6). On using (4.6) again we have

$$(u, v; x, y, z) = (u, y, v; x, z). \tag{4.10}$$

We are now in a position to make the final step in the argument. On applying (4.10), (4.8) and (4.10) again we obtain

$$\left\{\begin{aligned}(u, v; x, y, z) &= (u, y, v; x, z)\\ &= (y, u, v; x, z)\\ &= (y, v; x, u, z).\end{aligned}\right. \tag{4.11}$$

Next we permute the elements y, v, (x, u), z in the last commutator, use (4.8), then permute again:

$$\left\{\begin{aligned}(y, v; x, u, z) &= (x, u, y; v, z)\\ &= (u, x, y; v, z)\\ &= (v, y; u, x, z).\end{aligned}\right. \tag{4.12}$$

But the argument, or result, of (4.11) gives

$$(v, y; u, x, z) = (x, y; u, v, z). \tag{4.13}$$

Combining (4.11), (4.12) and (4.13) we obtain

$$(u, v; x, y, z) = (x, y; u, v, z)$$

which when variables are permuted establishes

$$\big((x, y), z, (u, v)\big)\,\big(z, (u, v), (x, y)\big) = 1. \tag{4.14}$$

But from (4.3) we can derive the law

$$\big((u, v), (x, y), z\big)\,\big((x, y), z, (u, v)\big)\,\big(z, (u, v), (x, y)\big) = 1. \tag{4.15}$$

On combining (4.14) with (4.15) we at once find

$$((u, v), (x, y), z) = 1; \tag{4.16}$$

that is, G'' lies in the centre of G. As G'' is abelian (4.7) shows that G'' has exponent 2.

This completes the proof of Theorem 3.

We apply the result to the 3-metabelian groups. These groups, discussed by B. H. NEUMANN in [3], are defined by the property that any subgroup generated by 3 elements is metabelian. It is therefore clear that every 3-metabelian group belongs to the variety (4.1).

COROLLARY. *Every 3-metabelian group G has G'' in the centre and of exponent* 2.

THEOREM 4. *Every group G of the variety associated with the law*

$$(x, y)^2 = 1 \tag{4.17}$$

has the properties

(i) *G'' lies in the centre; and*

(ii) *G' has exponent* 4.

PROOF. It will suffice to show that the variety (4.1) contains the variety (4.17), for (i) would follow at once from Theorem 3 and (ii) would follow from the fact that G' is generated by elements of order 2 and is nilpotent of class at most 2.

Now (1.8) gives

$$(y, x)\,(x, z) = (y z^{-1}, x)^z$$

identically, and in the variety (4.17) we deduce that

$$(y, x)\,(x, z)\,(y, x)\,(x, z) = 1$$

which is clearly equivalent to

$$(x, y; x, z) = 1$$

in this case.

This completes the proof of Theorem 4.

No one seems to have decided whether a group in which all commutators have finite, or bounded, order can have a non-periodic commutator subgroup.

That Theorems 3 and 4 are in a sense best possible results follows from the construction of a 3-metabelian non-metabelian group by NEUMANN in [3]. It is not difficult to verify that this example belongs to the variety (4.17) and so to the variety (4.1). More generally it can be proved that the 3-metabelian groups form the variety (4.1) — again, the details are omitted.

5. The variety $(x, y, z;\ x, w) = 1$

This variety is given by (3.1) with $m = 1$, $n = 2$, and so the conclusions of Theorem 2 are applicable; but more can be deduced when Theorem 3 also is used, as described below. Note that since the free nilpotent groups of

class 4 belong to this variety an exponent restriction on G'' cannot be expected.

THEOREM 5. *Every group G of the variety associated with the law*

$$(x, y, z; x, w) = 1 \tag{5.1}$$

has the properties

(i) *G/Z is metabelian; and*

(ii) *(G_2, G_1) has exponent 3.*

PROOF. The law

$$\big((x, y, z)^u, (x, w)^v\big) = 1 \tag{5.2}$$

follows from (5.1) as (3.2) follows from (3.1). We deduce from (1.1), (1.2) and (5.1) that

$$(x, y, z)^{-1} = \big(z, (x, y)\big) = (y, x, z)^{(x,y)} = (y, x, z);$$

in particular

$$(x, y; u, v) = (u, v; y, x) = (y, x; v, u) \tag{5.3}$$

and

$$(x, y, z; u, v) = (y, x, z; v, u). \tag{5.4}$$

Consider (1.5) with $a=w$, $b=(x, y)$, $c=(z, x)$:

$$\big(z, x, w^{-1}, (x, y)\big)^w \big(w, (y, x), (z, x)\big)^{(x,y)} \big(x, y, (x, z), w\big)^{(z,x)} = 1. \tag{5.5}$$

On applying (1.2) and (5.2) to the terms on the left-hand side we obtain

$$\big(x, y, (x, z), w\big) = 1. \tag{5.6}$$

As (5.6) states that G/Z belongs to the variety (4.1), the conclusions of Theorem 3 apply to G/Z. Therefore in G we have

$$\big((x, y; u, v)^2, z\big) = 1. \tag{5.7}$$

On using (1.3) and (5.2) we find that (5.7) becomes

$$\big((x, y), (u, v), z\big)^2 = 1. \tag{5.8}$$

Further, (4.3) shows that in G

$$(x, y, z)\,(y, z, x)\,(z, x, y) \in Z.$$

This fact with (5.2) gives

$$(y, z, x; x, w) = 1 \tag{5.9}$$

and

$$\big((x, y, z)\,(y, z, x)\,(z, x, y), (u, v)\big) = 1.$$

The last equality gives, when (1.3) and (5.2) are applied to it,

$$(x, y, z; u, v)\,(y, z, x; u, v)\,(z, x, y; u, v) = 1. \tag{5.10}$$

Next we quote (3.12) with $m=1$ and $n=2$:

$$(x, y, z; u, v) = (x, v; u, y, z). \tag{5.11}$$

We require a further relation, and it is obtained by expansion of the relation

$$(uv, (y, z); uv, w) = 1 \tag{5.12}$$

derived from (5.9). We may use the expansion of (3.3) with m $m-1$; thus by (3.4) and (3.5)

$$(v, (y, z), (u, w)^v) = (v, w, (u, (y, z))^v). \tag{5.13}$$

After some reduction with (1.3), (5.2) and (5.9) we find

$$(v, (y, z), (u, w)) = ((v, w), (u, (y, z)));$$

and on using (5.3) this becomes

$$(y, z, v; u, w) = (y, z, u; w, v). \tag{5.14}$$

Now we shall use the earlier relations to develop (5.14). Applying (5.11) to both sides we obtain

$$(y, w; u, z, v) = (y, v; w, z, u). \tag{5.15}$$

Next apply (5.4) to both sides of (5.15):

$$(w, y; z, u, v) = (v, y; z, w, u). \tag{5.16}$$

Finally apply (5.11) to both sides of (5.16):

$$(w, u, v; z, y) = (v, w, u; z, y). \tag{5.17}$$

At this point (5.10) and (5.17) combine to give

$$(x, y, z; u, v)^3 = 1. \tag{5.18}$$

To complete the proof we apply (1.5) with $a=z$, $b=(u, v)$, $c=(y, x)$, and simplify with (5.2) and (1.2):

$$(y, x, z^{-1}; u, v)^z (z, (v, u), (y, x)) (u, v, (x, y), z) = 1,$$

$$(y, x, z^{-1}; u, v)^z (u, v, z; y, x) = (u, v, (x, y), z)^{-1}. \tag{5.19}$$

The factors on the left-hand side of (5.19) commute by (5.2) and their product has order 3 or 1 by (5.18). But the element on the right-hand side has order 2 or 1 by (5.8). Hence

$$(u, v, (x, y), z) = 1. \tag{5.20}$$

We conclude that $G'' \leqq Z(G)$; since G'' is abelian (5.18) shows that (G_2, G_1) has exponent 3. This completes the proof of Theorem 5.

Corollary 1. *Every group G whose 4-generator subgroups all belong to the variety*

$$(x, y, z; u, v) = 1 \tag{5.21}$$

has G'' central and (G_2, G_1) of exponent 3.

This is obvious. It can further be proved that the groups of the variety (5.1) are the only groups with the properties postulated in Corollary 1. A more interesting consequence of Theorem 5 refers to Theorems 3 and 4.

Corollary 2. *Every group G of the variety associated with the law (4.1) or the law (4.17) has $(G_2, G_1) = 1$.*

We saw that both these laws imply (4.2), which in turn implies (5.1), and so (G_2, G_1) has exponent 3. But we know from Theorems 3 and 4 that G'' has exponent 2. Therefore $(G_2, G_1) = 1$.

Corollary 2 can of course be proved more directly from the hypothesis of Theorem 3. We mention without proof that this result with the aid of (1.5) will give part (i) of Theorem 3.

References

[1] Hall, M.: The Theory of Groups. New York 1959.
[2] Levi, F. W.: Groups in which the commutator relation satisfies certain algebraic conditions. J. Indian Math. Soc., N.s. **6**, 87—97 (1942).
[3] Neumann, B. H.: On a conjecture of Hanna Neumann. Proc. Glasgow Math. Assoc. **3**, 13—17 (1956).

Department of Pure Mathematics, The University, Sheffield 10

(Eingegangen am 3. Oktober 1960)

Avann, S. P.
Math. Zeitschr. 76, 283–287 (1961)

Distributive properties in semi-modular lattices

By
S. P. Avann

Projectivity and distributivity play an important role in the structure of lattices. In this study we are concerned with essentially distributive-like properties in sets of projective quotients in semi-modular lattices of finite length.

Two typical results are: a necessary and sufficient condition that a full equivalence class of projective quotients of equal length in a lower semi-modular lattice have a common lower transpose in the set is that numerators are unique; a merely sufficient condition is that the set of join-irreducibles contained in the numerator but not in the denominator of a quotient is invariant.

Notation. We shall use $\supset$, $\geqq$, $>$ for proper inclusion, inclusion, and covering respectively between elements of the lattice $\mathscr{L}$ as well as between sets. $\delta[a]$ is rank or dimension of $a \in \mathscr{L}$. "Iff" means "if and only if".

$\mathscr{L}$ is a lower semi-modular or LSM lattice iff it satisfies

$$(\xi') \qquad b \cup c > b \quad \text{implies} \quad c > b \cap c.$$

$\mathscr{L}$ is upper semi-modular or USM iff it satisfies

$$(\xi) \qquad c > b \cap c \quad \text{implies} \quad b \cup c > b.$$

$\mathscr{L}$ is a lower semi-distributive or LSD (upper semi-distributive or USD) lattice if it is an LSM (USM) lattice in which all modular sublattices are distributive.

We designate a quotient lattice $\{v \in \mathscr{L} \mid a \geqq v \geqq b\}$ by a/b.

We write $a/b \geqq_T c/d$ when a/b is merely an upper transpose of c/d: $a = b \cup c$ and $d = b \cap c$. When a/b and c/d are also of the same length: $\ln(a/b) = \delta[a] - \delta[b] = \delta[c] - \delta[d] = \ln(c/d)$, we write simply $a/b \geqq c/d$ and call the transpose restricted. Restricted transposedness $\geqq$ is a partial ordering relation on any full set of quotients of equal length; proper upper transposedness $>$, covering transposedness $\succ$, and the duals $\leqq$, $\prec$, $<$ are defined naturally. When $\mathscr{L}$ is semi-modular, $Q_R = \{a_i/b_i\}$ will denote a full equivalence class with respect to restricted projectivity, which is the equivalence relation generated by restricted transposedness. For simplicity we shall hereafter call Q_R a restricted projective set. When $\mathscr{L}$ is modular, projective quotients are isomorphic, and the notion of restrictivity is redundant. We let

$$\mathscr{A} = \{a_i \mid a_i/b_i \in Q_R\} \quad \text{and} \quad \mathscr{B} = \{b_i \mid a_i/b_i \in Q_R\}.$$

Let P and P' be the partially ordered sets of join-irreducibles and of meet-irreducibles respectively of $\mathscr{L}$. We write $A=\{x\in P\mid x\leqq a\}$ and $A'=\{y\in P'\mid y\geqq a\}$; similarly $B, C, D, \ldots$ for $b, c, d, \ldots$. We shall use freely the following obvious properties: $A\supset B$ iff $a>b$; $a=\cup_{x\in A}x$; when $a/b\geqq_T c/d$, $A\geqq B+C$, $D=B\cdot C$, and $A-B\geqq C-B\cdot C=C-D$ where $+$, $\cdot$, and $-$ are point set sum, product, and difference. In the proof of Theorem 8 we shall use the dual properties of A' also.

Our results concern the following 11 conditions on a restricted projective set Q_R in a semi-modular lattice $\mathscr{L}$.

(1) Corresponding to each denominator $b_i\in\mathscr{B}$ is a unique numerator $a_i\in\mathscr{A}$.

(2) There exists $a_0\in\mathscr{A}$ such that $a_0\leqq a_i$ for all $a_i\in\mathscr{A}$.

(3) $\mathscr{A}$ is closed with respect to meet.

(4) There exists $a_0/b_0\in Q_R$ such that $a_0/b_0\leqq a_i/b_i$ for all $a_i/b_i\in Q_R$.

(5) $A_i-B_i=A_j-B_j$ for all a_i/b_i, a_j/b_j in Q_R.

(6) $\mathscr{A}\geqq\mathscr{B}$: As quotients $\mathscr{A}$ is an upper restricted transpose of $\mathscr{B}$

(1′)—(5′), the duals of (1)—(5).

We note that (6) is self dual.

For several proofs we need the following generalization of Dedekind's Transposition Principle.

LEMMA. *If $a/b\supset c/d$ and $a\geqq r>s\geqq c$ in a LSM lattice, then $b\geqq b\frown r>b\frown s\geqq d$ and $a/b\geqq r/b\frown r>s/b\frown s\geqq c/d$.*

PROOF. First, $a/b\geqq_T r/b\frown r$ and $c\smile(b\frown r)/b\frown r\geqq_T c/d$. Also $r\geqq c\smile(b\frown r)\geqq b\frown r$. Hence by a well-known extension of (ξ') [2; Lemma 1, p. 67] $\ln a/b\geqq\ln r/b\frown r\geqq\ln c\smile(b\frown r)/b\frown r\geqq\ln c/d=\ln a/b$. Therefore the lengths are equal and $r=c\smile(b\frown r)$. Thus $a/b\geqq r/b\frown r\geqq c/d$. Similarly, $r/b\frown r\geqq s/(b\frown r)\frown s=s/b\frown s\geqq c/d$. By ($\xi'$) $b\frown r>b\frown s$ so that $r/b\frown r>s/b\frown s$.

THEOREM 1. *In a LSM lattice* (1), (2), (3), *and* (4) *are equivalent for any restricted projective set Q_R.*

PROOF. (4) implies (1) and (2), and (3) implies (2) trivially. Next, (4) implies (3). For consider $a_r/b_r\geqq a_0/b_0\leqq a_t/b_t$. Since $a_r\geqq a_r\frown a_t\geqq a_0$, the lemma yields $a_r/b_r\geqq a_r\frown a_t/(a_r\frown a_t)\frown b_r=a_r\frown a_t/b_r\frown b_t\geqq a_0/b_0$. Whence $a_r\frown a_t/b_r\frown b_t\in Q_R$ and $a_r\frown a_t\in\mathscr{A}$ as desired. Given (2), we shall prove (4). Let b_0 be a denominator of a_0. By transitivity $a_0/b_0\leqq a_r/b_r\leqq a_t/b_t$ implies $a_0/b_0\leqq a_t/b_t$. Now consider the case $a_0/b_0\leqq a_r/b_r\geqq a_t/b_t$. We have $a_r=a_t\smile b_r\geqq a_t\geqq a_0$, the latter by hypothesis. By the lemma $a_0/b_0\leqq a_t/b_r\frown a_t=a_t/b_t\leqq a_r/b_r$. For arbitrary $a/b\in Q_R$ there exists a finite sequence $a_0/b_0\leqq a_n/b_n\sim a_t/b_t\sim\cdots\sim a/b$ where $\sim$ is restricted transposition $\geqq$ or $\leqq$. Applying finite induction, the above two properties yield $a_0/b_0\leqq a/b$ for all $a/b\in Q_R$. The proof of (1) implies (4) follows the pattern of the preceding. Let b_0 be any minimal denominator and a_0 its unique numerator. Again $a_0/b_0\leqq a_r/b_r\leqq a_t/b_t$ implies $a_0/b_0\leqq a_t/b_t$. Hence we need only show that $a_0/b_0\leqq a_r/b_r\geqq a_t/b_t$ implies $a_0/b_0\leqq a_t/b_t$ to obtain (4). Accordingly, we assume $a_t\geqq a_0$. First, $a_t\not\subset a_0$; otherwise the lemma gives

$a_t/b_t < a_r/b_r \leqq a_r/b_r$, contradicting the minimality of b_0. Hence there exists a connected chain $a_0 < a_1 < \cdots < a_n \equiv a_0 \cup a_t$ with $n \geqq 1$ and an element c such that $a_i \leqq c < a_n$ with $c \not\geqq a_0$. Let $b_i = b_r \cap a_i$ and $e_i = c \cap a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. By the lemma $b_0 < b_1 < \cdots < b_n \leqq b_r$ and $a_0/b_0 < a_1/b_1 < \cdots < a_n/b_n \leqq a_r/b_r$. We show by an induction on i that $b_i \leqq e_i < a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ and that $e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} < e_n = c$. For $i = 0$ we have $e_0 < a_0$ by (ξ'). Moreover $b_0 \leqq e_0$; otherwise $b_0 > b_0 \cap e$ by (ξ') and $a_0/b_0 > e_0/b_0 \frown e_0$, contradicting the minimality of b_0. Assume true for $0 \leq i < n$ and consider the case of $i+1$. Now by the induction hypothesis $a_{i+1} > a_i > e_i \geqq b_i$. Since $c \not\geqq a_0$, $c \not\geqq a_{i+1}$, $a_n = c \cup a_{i+1} > c$, and by (ξ') $a_{i+1} > e_{i-1} \geqq e_i$. Indeed, $e_{i-1} > e_i$ by the Jordan Dedekind chain condition. Suppose $e_{i+1} \not\geqq b_{i+1}$. Then $b_i \leqq e_{i+1} \cap b_{i+1} < b_{i+1}$ forcing $b_{i+1} > b_i = e_{i+1} \cap b_{i+1}$ and $a_{i+1} = e_{i+1} \cap b_{i+1} > e_{i+1}$. Thus $a_{i+1}/b_{i+1} > e_{i+1}/b_i \in Q_R$. But the unique numerator of b_i is a_i, which is distinct from e_{i+1}, since $c \not\geqq a_i$. Thus $e_{i+1} \geqq b_{i+1}$ and our induction on i is complete. Hence $a_n > c = e_n \geqq b_n$ and $b_n = b_n \cap c$. Applying the lemma to $a_r \geqq a_n > c \geqq a_t$ we obtain $b_r \geqq b_n > b_r \cap c = b_r \cap a_n \cap c = b_n \cap c$, a contradiction. Hence our initial assumption $a_t \not\geqq a_0$ is false. Thus $a_r \geqq a_t \geqq a_0$ and by the lemma $a_r/b_r \geqq a_t/b_t \geqq a_0/b_0$ as desired. Therefore (1) implies (4) and the proof of the entire theorem is complete.

Remark. In a *USM* or *USD* lattice *USD* counterexamples show that (1) does not imply (2), (3), or (4) and (3) is not implied by (1), (2), or (4) in Q_R. It .s easy to show that (2) ,mplies (4). All the other implications are trivial.

Theorem 2. *In any restricted projective set Q_R of an LSM lattice* (5) *implies* (1), (2), (3), *and* (4).

Proof. If (5) holds, a given denominator $b \in \mathscr{B}$ uniquely determines B, A, and $a = \cup_{x \in A} x$, which is condition (1). Hence also (2), (3), and (4) hold by Theorem (1).

The converse of Theorem 2 is not true.

Theorem 3. *In a LSD lattice $\mathscr{L}$* (1)—(5) *all hold for any restricted projective set Q_R.*

Proof. By Theorem 2 it suffices to prove (5) holds in Q_R. Let $a/b \geqq c/d$ be an arbitrary transposed pair in Q_R; then $\delta[a] - \delta[b] = \delta(c] - \delta[d]$. But it is known [*3* or *1*, Theorem 5.5 (H) iff (B)] that $\delta[a]$ is the order of A for all $a \in \mathscr{L}$. Since always $A \geqq B + C$ and $A - B \geqq C - D$, it then follows that $A - B = C - D$.

Corollary. *A LSM lattice is LSD iff for each set Q_R any one of* (1)—(5) *hold.*

Proof. Necessity by Theorem 3. If $\mathscr{L}$ is not *LSD*, then there exists a non-distributive modular sublattice, another of order 5, and a third of order 5 [*1*; Corollary 4.4.3] which is dense in $\mathscr{L}$: $c > a_1, a_2, a_3 > b$. Then a_1/b, a_2/b, and a_3/b belong to the same restricted set Q_R of prime quotients. Hence (1) is false, and each of (2)—(5) are likewise false for Q_R by the contrapositives of Theorems 1 and 2.

THEOREM 4. *For any projective set Q of quotients in a modular lattice $\mathscr{L}$ each pair of conditions, one from* (1), (2), (3), (4) *and one from their duals* (1'), (2'), (3'), (4') *is equivalent to* (6).

PROOF. By the dual of Theorem 1 (1'), (2'), (3'), (4') are equivalent in an *USM* lattice, hence in $\mathscr{L}$ also. Clearly (4) and (4'): $a_0/b_0 \subseteq a_i/b_i \subseteq a_1/b_1$ for all $a_i/b_i \in Q$, is equivalent to $\mathscr{A} = a_1/a_0 \geqq b_1/b_0 = \mathscr{B}$.

THEOREM 5. *For any projective set Q of quotients that are complemented sublattices in a modular lattice $\mathscr{L}$, each of the* 11 *conditions* (1)—(5), (1')—(5'), (6) *are equivalent.*

PROOF. In view of Theorems 1, 2, their duals, and 4 it will suffice to prove that (1) implies (1') and (5). For then by duality (1') implies (1) and (5'). Given (1), let b_2 and b_3 be two denominators of an arbitrary numerator a_2. Let c_2' be a complement of $c_2 \equiv b_2 \cup b_3$ in a_2/b_2 and c_3' be a complement of c_2 in a_2/b_3. Then $c_2' \cup b_3 = c_2' \cup b_2 \cup b_3 = c_2' \cup c_2 = a_2$ and $c_2' \cap b_3 = c_2' \cap c_2 \cap b_3 = b_2 \cap b_3$. We therefore have $a_2/b_3 \geqq c_2'/b_2 \cap b_3 \in Q$. By symmetry $a_2/b_2 \geqq c_3'/b_2 \cap b_3 \in Q$. By uniqueness of numerators $c_2' = c_3'$. It follows that $b_2 = c_2' \cap c_2 = c_3' \cap c_2 = b_3$. Hence (1') holds and by Theorem 1 and its dual (4) and (4') hold in particular: $a_1/b_1 \geqq a_i/b_i \geqq a_0/b_0$ for a_1/b_1, a_0/b_0, and all $a_i/b_i \in Q$. Assume (5) is false; then since $A_1 - B_1 \geqq A_i - B_i \geqq A_0 - B_0$, it must follow that $A_1 - B_1 > A_0 - B_0$. Particularly, by considering a connected descending chain from a_1 to a_0, there exists a/b, $c/d \in Q$ such that $a_1/b_1 \geqq a/b > c/d \geqq a_0/b_0$ and $A - B \supset C - D$. Consider $x \in (A - B) - (C - D)$: $x \subseteq a$, $x \not\subseteq b$, $x \not\subseteq c$. The join-irreducible x covers exactly one element x_0. Now $a \geqq x \cup c > c < a$ requires $a = x \cup c > c$. Hence by (ξ') $x > x \cap c = x_0$ necessarily. By the modular law $c \cap (x \cup d) = (c \cap x) \cup d = x_0 \cup d$. Also $c \cup (x \cup d) = c \cup x = a$. Application of ($\xi'$) to $b \cap (x_0 \cup d) = b \cap c \cap (x_0 \cup d) = d \cap (x_0 \cup d) = d < b$ yields $b \cup (x_0 \cup d) = x_0 \cup b > x_0 \cup d$. Again by ($\xi'$) $c \cup (x_0 \cup b) = x_0 \cup a = a > c$ leads to $x_0 \cup b > c \cap (x_0 \cup b) \geqq x_0 \cup d$, requiring $c \cap (x_0 \cup b) = x_0 \cup d$. The prime quotient b/d is trivially complemented, while c/d is complemented by hypothesis. Hence $a/d = b \cup c/d$ is complemented [2; Theorem 6, p. 105]. Its quotient sublattice $a/x_0 \cup d$ is therefore likewise complemented. We have shown that in the latter c has two relative complements $x \cup d$ and $x_0 \cup b$, which we shall show are distinct. Since $b \cap x < x$, then $b \cap x \subseteq x_0$ and the modular law gives $x_0 = x_0 \cup (b \cap x) = (x_0 \cup b) \cap x < x$. Therefore $x_0 \cup b \not\supseteq x \subseteq x \cup d \neq x_0 \cup b$. Hence by a theorem of VON NEUMANN [2; Theorem 10, p. 124], c is not in the center of $a/x_0 \cup d$. Neither then is the relative complement $x_0 \cup b$ in the center, and by the same theorem $x_0 \cup b$ has another complement e in $a/x_0 \cup d$ distinct from c. But $e \cup b = e \cup x_0 \cup b = e \cup a = a$ and $e \cap b = e \cap (x_0 \cup b) \cap b = (x_0 \cup d) \cap b = (x_0 \cup d) \cap c \cap b = (x_0 \cup d) \cap d = d$. Hence $a/b \supset c/d \in Q$ making c and e distinct numerators of d. This contradiction of our hypothesis (1) means our assumption is wrong. Thus (1) implies (5).

THEOREM 6. *In each projective set Q of a distributive lattice all* 11 *conditions* (1)—(5), (1')—(5'), (6) *hold.*

PROOF. Apply Theorem 3, its dual, and Theorem 4.

COROLLARY. *A modular lattice is distributive iff for each set Q any one of the* 11 *conditions holds.*

PROOF. Necessity by Theorem 6. A non-distributive modular lattice $\mathscr{L}$ contains a non-distributive modular sublattice of order 5 that is dense in $\mathscr{L}$: $c > a_1, a_2, a_3 > b$. Here a_1, a_2, a_3 are distinct numerators of b in the set Q of (prime) complemented quotients to which a_1/b, a_2/b, a_3/b belong. Hence in Q (1) is false, and all the other 10 conditions are likewise false by the contrapositive of Theorem 5.

DEFINITION. We call the elements b, c a distributive pair in a lattice $\mathscr{L}$ iff all six distributive laws hold among b, c, and g for all $g \in \mathscr{L}$. When $\mathscr{L}$ is modular, one distributive law implies all six.

THEOREM 7. *In a modular lattice b, c are a distributive pair if and only if $A = B + C$ where $a = b \cup c$.*

PROOF. Let b, c be a distributive pair. $A \geqq B + C$. For arbitrary join-irreducible $x \in A$ $x = x \cap a = x \cap (b \cup c) = (x \cap b) \cup (x \cap c)$. Hence $x = x \cap b$ or $x = x \cap c$. I.e. $x \leqq b$ or $x \leqq c$, so that $x \in (B + C)$ and $A = B + C$. Conversely, suppose $A = B + C$. For arbitrary $e \in \mathscr{L}$ $E \cdot A = E \cdot (B + C) = E \cdot B + E \cdot C \leqq G$, where $g = (e \frown b) \cdot (e \frown c)$. Hence $e \frown a \leqq g$. But $e \frown a \geqq g$ always. Hence equality subsists.

THEOREM 8. *In a projective set Q of a modular lattice* (5) *and* (5′) *are equivalent (and either implies all the other ten conditions).*

PROOF. Given (5). Then (4) holds by Theorem 2. Given an arbitrary numerator $a_i \in \mathscr{A}$; a_i determines A_i, which in turn determines B_i by hypothesis and $b_i = \bigcup_{x \in B_i} x$, all uniquely. Thus (1′), and by the dual of Theorem 1, (4′) hold true. Hence $a_0/b_0 \leqq a_i/b_i \leqq a_1/b_1$ for a_0/b_0, a_1/b_1 and all $a_i/b_i \in Q$. We then have $A_1 - B_1 = A_0 - B_0 = A_0 - B_1 \cdot A_0$ and $A_1 = A_0 + B_1$. By Theorem 7, a_0 and b_1 are a distributive pair. By the dual of the converse $B_0' = B_1' + A_0'$ and $B_0' - A_0' = B_1' - B_1' \cdot A_0' = B_1' - A_1'$. But $B_0' - A_0' \geqq B_i' - A_i' \geqq B_1' - A_1'$ for all $a_i/b_i \in Q$ then entails equality, which is condition (5′). Dually, (5′) implies(5).

References

[1] AVANN, S. P.: Application of the join-irreducible excess function to semi-modular lattices. Math. Annalen. **142**, 345—354 (1961).

[2] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, rev. ed. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, 1948.

[3] DILWORTH, R. P.: Lattices with unique irreducible decompositions. Ann. Math. **41**, 771—777 (1940).

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle 5

(Eingegangen am 25. Oktober 1960)

Ishiguro, K.
Math. Zeitschr. 76, 288—294 (1961)

Zur Gibbsschen Erscheinung für das Kreisverfahren

Von

Kazuo Ishiguro

1. Bei den folgenden Untersuchungen studieren wir die Gibbssche Erscheinung der Fourier-Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu}$. Das Folgende ist schon lange bekannt [1]: Wenn $nt_n \to \tau$ und $t_n \to +0$ für $n \to \infty$, dann strebt dafür

$$s_n(t_n) \to \int_0^{\tau} \frac{\sin v}{v}\, dv, \qquad 0 \leqq \tau \leqq +\infty,$$

wobei

$$s_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu t}{\nu}.$$

O. Szász [2] bewies den folgenden

Satz 1. *Für das Eulersche Mittel $\sigma_n(t)$ der Fourier-Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu}$ gilt: Wenn $nt_n \to \tau$, $0 \leqq \tau \leqq +\infty$, und $nt_n^2 \to 0$ für $t_n \to +0$, dann strebt dafür*

$$\sigma_n(t_n) \to \int_0^{\tau r} \frac{\sin v}{v}\, dv,$$

wobei

$$\sigma_{n,r}(t) = \sigma_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} r^{\nu} (1-r)^{n-\nu} s_{\nu}(t), \qquad \text{(vgl. [3], [4], [9])}.$$

Die $\sigma_n(t)$ sind abhängig vom Parameter r, von dem wir $0 < r \leqq 1$ annehmen. Bei Annahme $r = 1$ reduziert sich die obige Definition auf die der gewöhnlichen Konvergenz. Wir bezeichnen dies Limitierungsverfahren als das (ε, r)-Verfahren.

Wir beweisen hier den folgenden

Satz 2. *Für das Kreismittel $\sigma_n^*(t)$ der Fourier-Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu}$ gilt: Unter denselben Bedingungen über t_n wie in Satz 1 strebt*

$$\sigma_n^*(t_n) \to \int_0^{\tau/r} \frac{\sin v}{v}\, dv \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

wobei

$$\sigma_{n,r}^{*}(t)=\sigma_{n}^{*}(t)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}r^{n+1}(1-r)^{\nu-n}s_{\nu}(t),\qquad (\text{vgl. } [4],\ [9]).$$

Die $\sigma_n^*(t)$ sind abhängig vom Parameter r, von dem wir $0<r\leqq 1$ annehmen. Bei Annahme $r=1$ reduziert sich die obige Definition auf die der gewöhnlichen Konvergenz. Wir bezeichnen dies Limitierungsverfahren als das (γ, r)-Verfahren.

2. Zum Beweis von Satz 2 benützen wir die Methode von O. Szász [2].

Da $s_0=0$, $s_n=s_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu t}{\nu}=-\frac{t}{2}+\int_0^t\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx$, so ist

$$\sigma_n^*(t)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}r^{n+1}(1-r)^{\nu-n}s_\nu(t)$$

$$=-\frac{t}{2}+\int_0^t\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}r^{n+1}(1-r)^{\nu-n}\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\,dx,$$

wo die Umkehrung von zwei Operationen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Summierung erlaubt ist. Andererseits folgt aus

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}(1-r)^{\nu-n}e^{i(\nu-n)x}=\frac{1}{\{1-(1-r)e^{ix}\}^{n+1}},$$

daß

$$\sigma_n^*(t)=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Im\int_0^t\frac{r^{n+1}e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{\sin\frac{1}{2}x\{1-e^{ix}+re^{ix}\}^{n+1}}dx.$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{1-e^{ix}+re^{ix}}=\varrho\,e^{i\alpha},$$

oder

$$(1)\qquad\begin{cases}\frac{1}{\varrho}\cos\alpha=1-\cos x+r\cos x\\ \frac{1}{\varrho}\sin\alpha=\sin x-r\sin x,\end{cases}$$

so ist

$$(2)\qquad\begin{cases}\frac{1}{\varrho^2}=r^2+2(1-r)(1-\cos x)\\ \frac{1}{r^2\varrho^2}\geqq 1\end{cases}$$

und weiter

$$(3)\qquad 0\leqq r\varrho\leqq 1.$$

Demnach ist

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_n^*(t)+\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\, r^{n+1}\varrho^{n+1}\sin\left\{(n+1)\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}dx \\ \qquad =\frac{1}{2}\int\limits_0^t \cot\frac{1}{2}x\,(r\varrho)^{n+1}\sin\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx+ \\ \qquad +\frac{1}{2}\int\limits_0^t (r\varrho)^{n+1}\cos\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx=\frac{1}{2}(I+J). \end{cases}$$

Nun ist wegen (3)

$$|J|=\left|\int\limits_0^t (r\varrho)^{n+1}\cos\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx\right|\leqq t,$$

so daß $J=\eta t$, $(|\eta|<1)$, und

$$\sigma_n^*(t)+\frac{1-\eta}{2}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^t (r\varrho)^{n+1}\cot\frac{1}{2}x\sin\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx.$$

Andererseits ist

$$(5)\qquad 1-(r\varrho)^{n+1}=(1-r\varrho)\sum_{\nu=0}^{n}(r\varrho)^{\nu}\leqq(n+1)(1-r\varrho),$$

und aus (2) folgt

$$1-(r\varrho)^2=\frac{2(1-r)(1-\cos x)}{r^2+2(1-r)(1-\cos x)}.$$

Da $1-\cos x\leqq\frac{x^2}{2}$ für kleines x, gilt

$$1-(r\varrho)^2\leqq\frac{1-r}{r^2}x^2 \quad\text{und}\quad 1-r\varrho\leqq\frac{1-r}{r^2}x^2.$$

Nach (5) ist daher

$$1-(r\varrho)^{n+1}\leqq\frac{1-r}{r^2}(n+1)x^2,$$

oder auch

$$1-(r\varrho)^{n+1}=\lambda(n+1)x^2,\quad\text{wobei}\quad 0\leqq\lambda\leqq\frac{1-r}{r^2}.$$

Hieraus folgt

$$I=\int\limits_0^t (r\varrho)^{n+1}\cot\tfrac{1}{2}x\sin\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx$$

$$=\int\limits_0^t \cot\tfrac{1}{2}x\sin\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx-(n+1)\int\limits_0^t \lambda x^2\cot\tfrac{1}{2}x\sin\{(n+1)\alpha+nx\}\,dx$$

$$=I_1-I_2.$$

Hier ist

$$|I_2| = (n+1)\left|\int_0^t \lambda\, x^2 \cot\frac{1}{2}x \sin\{(n+1)\alpha + n x\}\, dx\right|$$

$$\leqq (n+1)\frac{1-r}{r^2}\int_0^t \left|x^2 \cot\frac{1}{2}x\right| dx = O(n t^2) = o(1)$$

für $n \to \infty$, wegen der Voraussetzung. Um I_1 abzuschätzen, benützen wir den folgenden

Hilfssatz (vgl. [5]). *Für kleines x ist*

$$\alpha = s x + O(x^3), \quad \textit{wobei} \quad s = \frac{1-r}{r}.$$

Beweis. Aus (1) folgt

$$\tan\alpha = \frac{(1-r)\sin x}{1-(1-r)\cos x} = \frac{(1-r)\sin x}{r + (1-r)(1-\cos x)}$$

$$= \frac{s \sin x}{1 + 2s \sin^2\frac{x}{2}}.$$

Andererseits ist für kleines x

$$\sin x = x + A x^3, \quad |A| \leqq 2,$$

und

$$\frac{1}{1-x} = 1 + B x, \quad |B| \leqq 1, \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

Daher ist

$$\frac{s \sin x}{1 + 2s \sin^2\frac{x}{2}} = s x + O(x^3).$$

Weiter, da

$$\tan^{-1} x = x + C x^3, \quad |C| \leqq 4 \quad \text{für kleines } x,$$

so folgt

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{(1-r)\sin x}{1-(1-r)\cos x} = s x + O(x^3),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wegen $\alpha = s x + \mu x^3$, $|\mu| \leqq K$, erhalten wir

$$I_1 = \int_0^t \cot\frac{1}{2}\, x \sin\{(n+1)\alpha + n x\}\, dx$$

$$= \int_0^t \cot\frac{1}{2} x \sin\left\{s x + \frac{n x}{r} + (n+1)\mu x^3\right\} dx$$

$$= \int_0^t \cot\frac{1}{2} x \sin s x \cos\left\{\frac{n x}{r} + (n+1)\mu x^3\right\} dx +$$

$$+ \int_0^t \cot\frac{1}{2} x \cos s x \sin\left\{\frac{n x}{r} + (n+1)\mu x^3\right\} dx = I_{11} + I_{12}.$$

Hier ist $|I_{11}| = O(t) = o(1)$ für $t \to 0$. Zweitens gilt

$$I_{12} = \int_0^t \cot\frac{1}{2}x \cos s\,x \sin\left\{\frac{n\,x}{r} + (n+1)\,\mu\,x^3\right\} dx$$

$$= \int_0^t \cot\frac{1}{2}x \cos s\,x \sin\frac{n\,x}{r} \cos(n+1)\,\mu\,x^3\,dx$$

$$+ \int_0^t \cot\frac{1}{2}x \cos s\,x \cos\frac{n\,x}{r} \sin(n+1)\,\mu\,x^3\,dx = I_{121} + I_{122},$$

wobei

$$|I_{122}| \leqq (n+1)\,K \int_0^t \left|\cot\frac{1}{2}x\right| x^3\,dx = O(n\,t^3) = o(1),$$

$$I_{121} = 2\int_0^t \frac{\sin\frac{n}{r}x}{x}\,dx - \int_0^t \sin\frac{n\,x}{r}\left\{\frac{2}{x} - \frac{\cos\frac{1}{2}x\cos s\,x\cos(n+1)\,\mu\,x^3}{\sin\frac{1}{2}x}\right\} dx.$$

Hierbei ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}x - x\cos\tfrac{1}{2}x\cos s\,x\cos(n+1)\,\mu\,x^3$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}x - x\cos\tfrac{1}{2}x + x\cos\tfrac{1}{2}x\{1 - \cos s\,x\cos(n+1)\,\mu\,x^3\},$$

und weiter erhalten wir durch den Mittelwertsatz

$$0 \leqq 2\sin\tfrac{1}{2}x - x\cos\tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{4}x^3,$$

und

$$\int_0^t \sin\frac{n}{r}x\,\frac{2\sin\frac{1}{2}x - x\cos\frac{1}{2}x}{x\sin\frac{1}{2}x}\,dx = O\left(\int_0^t x\,dx\right) = o(1).$$

Weiter, da

$$1 - \cos s\,x\cos(n+1)\,\mu\,x^3$$

$$= 1 - \cos(n+1)\,\mu\,x^3 - \cos(n+1)\,\mu\,x^3(\cos s\,x - 1)$$

$$= O(n^2x^6) + O(x^2),$$

gilt

$$\int_0^t \sin\frac{n}{r}x\cot\frac{1}{2}x\{1 - \cos s\,x\cos(n+1)\,\mu\,x^3\}\,dx$$

$$= O\left(\int_0^t n^2x^5\,dx\right) + O\left(\int_0^t x\,dx\right)$$

$$= O(n^2t^6) + O(t^2) = o(1).$$

Daher erhalten wir

$$2\sigma_n^*(t_n) - (1-\eta)\,t_n = 2\int_0^{t_n} \frac{\sin\frac{n}{r}x}{x}\,dx + o(1)$$

$$= 2\int_0^{nt_n/r} \frac{\sin v}{v}\,dv + o(1),$$

so daß

$$\sigma_n^*(t_n) \to \int_0^{\tau/r} \frac{\sin v}{v}\,dv \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. W. Meyer-König [6] und P. Vermes [10] haben die Verwandtschaft zwischen dem (ε, r)-Verfahren und dem (γ, r)-Verfahren untersucht und Sätze über den Vergleich dieser Verfahren aufgestellt. Andererseits haben L. Lorch [7] und A. Livingston [8] die Lebesgueschen Konstanten für das (ε, r)-Verfahren der Fourier-Reihe angegeben, d.h.

$$L(n; r) = \frac{2}{\pi^2}\log\left|\frac{2nr}{1-r}\right| + A + o(1),$$

mit

$$A = -\frac{2C}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{2}{\pi} - |\sin u|\right\}\frac{du}{u}, \tag{6}$$

wobei C die Euler-Mascheronische Konstante ist. Der Autor hat auch die Lebesgueschen Konstanten für das (γ, r)-Verfahren angegeben [5], d.h.

$$L^*(n; r) = \frac{2}{\pi^2}\log\left|\frac{2n}{1-r}\right| + A + o(1),$$

wobei A durch (6) gegeben ist.

Wenn wir das r in $L(n; r)$ durch $1/r$ ersetzen, so folgt $L^*(n; r)$, d.h. $L\left(n; \frac{1}{r}\right) = L^*(n; r)$. Wie wir schon gesehen haben, wenn wir in der Formel $\int_0^{\tau r} \frac{\sin v}{v}\,dv$ der Gibbsschen Erscheinung des (ε, r)-Verfahrens $\frac{1}{r}$ an Stelle des r setzen, so erhalten wir die Formel $\int_0^{\tau/r} \frac{\sin v}{v}\,dv$ von derjenigen des (γ, r)-Verfahrens. Diese Beziehung $r \leftrightarrow \frac{1}{r}$ zwischen (ε, r)-Verfahren und (γ, r)-Verfahren erscheint uns interessant.

Zum Schluß möchte der Autor seinen herzlichen Dank an die Herren K. Kunugi, S. Izumi und G. Pickert für ihre Beratung und Anregung ausdrücken.

Literatur

[1] ZYGMUND, A.: Trigonometric series. I. Cambridge 1959.
[2] SZÁSZ, O.: On the Gibbs' phenomenon for Euler means. Acta Univ. Szeged **12**, part B, 107—111 (1950).
[3] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1931.
[4] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949.
[5] ISHIGURO, K.: The Lebesgue constants for (γ, r) summation of Fourier series. Proc. Japan Acad. **36**, 470—474 (1960).
[6] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—307 (1950).
[7] LORCH, L.: The Lebesgue constants for $(E, 1)$ summation of Fourier series. Duke Math. J. **19**, 45—50 (1952).
[8] LIVINGSTON, A. E.: The Lebesgue constants for Euler (E, p) summation of Fourier series. Duke Math. J. **21**, 309—313 (1954).
[9] ZELLER, K.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin 1958.
[10] VERMES, P.: Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer. J. Math. **71**, 541—562 (1949).

Hokkaido-Universität, Sapporo (Japan)

(Eingegangen am 7. November 1960)

Ahmad, Z. U.
Math. Zeitschr. 76, 295–310 (1961)

On the absolute Cesàro summability factors of infinite series

By
Z. U. Ahmad

1.1. Definition. Let $\sum a_n$ be a given infinite series, and let s_n^ϱ and t_n^ϱ denote the n-th Cesàro means of order ϱ ($\varrho > -1$) of the sequences $\{s_n\}$ and $\{n\,a_n\}$ respectively, where s_n is the n-th partial sum of $\sum a_n$. The series $\sum a_n$ is said to be absolutely summable (C, ϱ), or summable $|C, \varrho|$, if the sequence $\{s_n^\varrho\}$ is of bounded variation, that is, the infinite series $\sum |s_n^\varrho - s_{n-1}^\varrho|$ is convergent [1].

1.2. We shall require the following definitions and identities.

$$t_n^\varrho = n\,(s_n^\varrho - s_{n-1}^\varrho)\ ^{2}), \tag{1.2.1}$$

$$t_n^\varrho = \frac{1}{A_n^\varrho} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\varrho-1}\,\nu\,a_\nu, \tag{1.2.2}$$

where

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\varrho x^n = (1-x)^{-\varrho-1} \qquad (|x|<1); \tag{1.2.3}$$

and, by definition [3]),

$$A_{-1}^\varrho = 0; \qquad A_0^{-1} = 1; \qquad A_n^{-\varrho} = 0 \,(n \geqq \varrho;\ \varrho = 1, 2, \ldots), \tag{1.2.4}$$

$$A_n^\varrho = \begin{cases} \binom{n+\varrho}{n} & (\varrho > -1) \\ (-1)^n \binom{-\varrho-1}{n} & (\varrho \leqq -1); \end{cases} \tag{1.2.5}$$

$$A_n^\varrho = \Gamma(n+\varrho+1)\,\{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\varrho+1)\}^{-1} \qquad (\varrho \neq -1, -2, \ldots) \tag{1.2.6}$$
$$\sim n^\varrho \{\Gamma(\varrho+1)\}^{-1}.$$

For any sequence $\{\varepsilon_n\}$, we write

$$\Delta^0 \varepsilon_n = \varepsilon_n, \qquad \Delta\,\varepsilon_n = \Delta^1 \varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \tag{1.2.7}$$

and

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{-\varrho-1}\,\varepsilon_{\nu+n}, \tag{1.2.8}$$

provided the series on the right converges.

---

[1]) Fekete [4], Kogbetliantz [6].
[2]) Kogbetliantz [6], [7].
[3]) Hardy [5].

If r and s are positive integers, we have

$$\Delta^r \Delta^s \varepsilon_n = \Delta^{r+s} \varepsilon_n, \tag{1.2.9}$$

and

$$\Delta^s (\delta_n \varepsilon_n) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \Delta^r \delta_n \Delta^{s-r} \varepsilon_{n+r}. \tag{1.2.10}$$

We also write

$$\bar{\varepsilon}_n = \Delta \varepsilon_n; \tag{1.2.11}$$

$$\begin{cases} E^{\beta,\sigma}(n,\mu) \\ \bar{E}^{\beta,\sigma}(n,\mu) \end{cases} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^{-\sigma-1} \begin{matrix} \varepsilon_{\nu+\mu} \\ \bar{\varepsilon}_{\nu+\mu} \end{matrix}; \qquad E^{\beta,\sigma}(-1,\mu) = 0, \tag{1.2.12}$$

$$\hat{E}^{\beta,\sigma}(n,\mu) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^{-\sigma-1} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu}, \tag{1.2.13}$$

$$T_n^\varrho = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t_\nu^\varrho}{\nu}, \qquad T_0^\varrho = 0. \tag{1.2.14}$$

Throughout this paper we use h and k to denote the integral parts of the non-negative numbers α and β respectively.

2.1. Introduction. The present paper is devoted to a generalization of the results contained in a series of three papers[4]) by PATI and the present author, concerning absolute Cesàro summability factors of infinite series.

In the said series of papers, we have extended the following theorem of BOSANQUET and CHOW in the case $\varkappa = \varrho \geqq 0$, by replacing the sequences $\{n^p\}$, $p \geqq 0$, by the monotonic non-decreasing sequence $\{\lambda_n\}$ and have also proved this more general result by means of a direct analysis which is self-contained and free from the use of apparently unconnected ancillary results of the type used by BOSANQUET and CHOW. Indeed these last mentioned authors had in essence to show the equivalence of the following theorem of theirs to a previous result of CHOW[5]).

THEOREM A[6]). If $\varkappa \geqq -1$, $\varrho \geqq 0$, $p \geqq 0$, necessary and sufficient conditions for $\sum a_n \varepsilon_n$ to be summable $|C, \varrho|$ whenever $s_n^\varkappa = O(n^p)$, as $n \to \infty$, are:

(I) a $\quad \sum n^{\varkappa-\varrho+p} |\varepsilon_n| < \infty$, $\qquad$ (I) b $\quad \sum n^{-1+p} |\varepsilon_n| < \infty$,

(II) $\quad \sum n^{\varkappa+p} |\Delta^{\varkappa+1} \varepsilon_n| < \infty$.

In this paper the author succeeds in generalizing Theorem A in the case $\varkappa \geqq 0$, $\varrho \geqq 0$, by replacing the sequence $\{n^p\}$, $p \geqq 0$, by the wider class of sequences $\{\lambda_n\}$, where $\{\lambda_n\}$ is a monotonic non-decreasing sequence.

2.2. We establish the following theorem.

THEOREM. *If $\alpha, \beta \geqq 0$, necessary and sufficient conditions for $\sum a_n \varepsilon_n$ to be summable $|C, \alpha|$ whenever $s_n^\beta = O(\lambda_n)$, as $n \to \infty$, where $\{\lambda_n\}$ is a positive monotonic non-decreasing sequence, are:*

(i) a $\quad \sum n^{\beta-\alpha} \lambda_n |\varepsilon_n| < \infty$, $\qquad$ (i) b $\quad \sum n^{-1} \lambda_n |\varepsilon_n| < \infty$,

(ii) $\quad \sum n^\beta \lambda_n |\Delta^{\beta+1} \varepsilon_n| < \infty$.

[4]) PATI and AHMAD [8], [9], [10].

[5]) CHOW [3], Theorem 2.

[6]) BOSANQUET and CHOW [2].

3.1. We require the following lemmas for the proof of our theorem.

LEMMA 1[7]). *If* $\sigma > -1$ *and* $\sigma - \delta > 0$, *then*

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{A_{n-\mu}^{\delta}}{n A_n^{\sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\delta}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\sigma}} = \frac{1}{\mu A_{\mu}^{\sigma-\delta-1}}.$$

LEMMA 2. *If* $\sigma \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\{\lambda_n\}$ *be a positive monotonic non-decreasing sequence, and* $s_n^{\sigma} = O(\lambda_n)$, *then*

(i) $s_n^{\sigma+\delta} = O(\lambda_n)$

(ii) $t_n^{\sigma} = O(n\lambda_n)$, $\quad t_n^{\sigma+\delta} = O(n\lambda_n)$

and

(iii) $n a_n = O(n^{\sigma+1}\lambda_n)$.

PROOF.

(i)
$$s_n^{\sigma+\delta} = \frac{1}{A_n^{\sigma+\delta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_{\nu}^{\sigma} s_{\nu}^{\sigma}$$

so that

$$\begin{aligned} |s_n^{\sigma+\delta}| &\leq \frac{1}{A_n^{\sigma+\delta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_{\nu}^{\sigma} |s_{\nu}^{\sigma}| \\ &\leq \frac{K\lambda_n}{A_n^{\sigma+\delta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_{\nu}^{\sigma} \\ &= K\lambda_n \text{ [8]}; \end{aligned}$$

hence,

$$s_n^{\sigma+\delta} = O(\lambda_n).$$

(ii) By (1.2.1),

$$t_n^{\sigma} = n(s_n^{\sigma} - s_{n-1}^{\sigma})$$

so that

$$|t_n^{\sigma}| \leq n\left(|s_n^{\sigma}| + |s_{n-1}^{\sigma}|\right) \leq K n \lambda_n;$$

hence

$$t_n^{\sigma} = O(n\lambda_n).$$

The proof of the second part of (ii) is similar to the proof of (i).

(iii)
$$n a_n = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{-\sigma-1} A_{\nu}^{\sigma} t_{\mu}^{\sigma}$$

so that

$$\begin{aligned} |n a_n| &\leq \sum_{\nu=1}^{n} |A_{n-\nu}^{-\sigma-1}| A_{\nu}^{\sigma} |t_{\mu}^{\sigma}| \\ &\leq K(n\lambda_n) n^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{n} |A_{n-\nu}^{-\sigma-1}| \\ &\leq K n^{\sigma+1} \lambda_n; \end{aligned}$$

hence

$$n a_n = O(n^{\sigma+1}\lambda_n).$$

---

[7]) CHOW [3], Lemma 1.

[8]) K denotes an absolute constant, not necessarily the same at each occurrence.

LEMMA 3[9]). *Let* $\sigma \geqq 0$, $\delta \geqq 0$. *If the series* $\sum n^{-1}|t_n^{\sigma}|$ *is convergent so is the series* $\sum n^{-1}|t_n^{\sigma+\delta}|$.

LEMMA 4[10]). *If the sequences* $\{u_n\}$ *and* $\{U_n\}$ *are connected by the relation*

$$U_n = \sum_{\mu=1}^{n} D_{n,\mu}\, u_\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

a necessary condition that the series $\sum |U_n|$ *should be convergent whenever* $u_n = O(1)$ *is that*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |D_{\mu,\mu}| < \infty.$$

LEMMA 5[11]). *If the sequences* $\{u_n\}$ *and* $\{U_n\}$ *are connected by the relation*

$$U_n = \sum_{\mu=1}^{\infty} D_{n,\mu}\, u_\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

a necessary condition that the series $\sum U_n$ *should be convergent whenever* $u_n = O(1)$, *is that*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} D_{n,\mu}| < \infty.$$

LEMMA 6. *If* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, *and* $\varepsilon_n = O(1)$, *then*

$$\sum = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}^{\alpha,\beta+1}(n,\mu)}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^{\alpha}} = \Delta^{\beta+1} \varepsilon_\mu.$$

The proof is similar to that of lemma 7 of CHOW[12]). We are giving it here for completeness. We have

$$\begin{aligned}
\sum &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^{-\beta-2} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{-\beta-2} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{-\beta-2} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu} \frac{1}{\nu+\mu} \qquad \text{(by Lemma 1)}, \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{-\beta-2}\, \varepsilon_{\nu+\mu} \\
&= \Delta^{\beta+1} \varepsilon_\mu,
\end{aligned}$$

the inversion of the order of summation being justified by absolute convergence.

LEMMA 7[13]). *If* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *then*

(i) $$E^{\alpha,\beta}(n,\mu) = \sum_{r=0}^{h} A_r^{-\beta-1} \sum_{p=0}^{r} A_p^{-r-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_\nu^{h-r} \sum_{j=0}^{\nu} A_j^{-\beta+p-1}\, \varepsilon_{j+\mu};$$

(ii) $$\overline{E}^{\alpha,\beta}(n,\mu) = \sum_{r=0}^{h} A_r^{-\beta-1} \sum_{p=0}^{r} A_p^{-r-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_\nu^{h-r} \sum_{j=0}^{\nu} A_j^{-\beta+p-1}\, \overline{\varepsilon}_{j+\mu}.$$

[9]) KOGBETLIANTZ [6].
[10]) CHOW [3], Lemma 6.
[11]) CHOW [3], Lemma 5.
[12]) CHOW [3].
[13]) (i) has been proved in CHOW [3], Lemma 12, the proof of (ii) is exactly similar.

LEMMA 8[14]). *Let* $\alpha \geqq 0$. *If* $\sum \lambda_n |\varepsilon_n| < \infty$, *and* $\sum n^\alpha \lambda_n |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n| < \infty$; *then*

(i) $$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\alpha \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E^{\alpha,\alpha}(n,\mu)|}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^\alpha} < \infty,$$

(ii) $$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\alpha+1} \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E^{\alpha,\alpha}(n,\mu)|}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^\alpha} < \infty,$$

(iii) $$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\alpha+1} \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E^{\alpha-1,\alpha}(n,\mu+1)|}{(n+\mu)\, A_{n+\mu}^\alpha} < \infty.$$

LEMMA 9. *If* $p \geqq 0$, $\{\lambda_n\}$ *is a positive monotonic non-decreasing sequence, and* $\sum n^p \lambda_n |\Delta^{p+1}\varepsilon_n| < \infty$, *then* $\sum n^q \lambda_n |\Delta^{q+1}\varepsilon_n| < \infty$, *for every* q *such that* $0 \leqq q \leqq p$.

This is proved by an easy adaptation of the proof of Lemma 2 [1].

3.2. Proof of the Theorem.

Let $\tau_n^0 = \tau_n = n\, a_n\, \varepsilon_n$, and let τ_n^α $(\alpha > 0)$ denote the n-th Cesàro mean of order α of the sequence $\{\tau_n\}$. Then by definition and by (1.2.1), the series $\sum a_n \varepsilon_n$ is summable $|C, \alpha|$ if and only if

$$\sum n^{-1} |\tau_n^\alpha| < \infty.$$

NECESSITY. Since, by (1.2.13),

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^{\alpha,\beta+1}(n,\mu) &= \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^{-\beta-2} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu [A_{n-\nu}^{\alpha-1} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu}]\, A_\nu^{-\beta-1} + (n+\mu)\, \varepsilon_{n+\mu}\, A_n^{-\beta-1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu [A_{n-\nu}^{\alpha-1} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu}]\, A_\nu^{-\beta-1}.
\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
A_n^\alpha \tau_n^\alpha &= \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu\, a_\nu\, \varepsilon_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta_\nu [A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu\, \varepsilon_\nu]\, s_\nu + n\, \varepsilon_n\, s_n \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu [A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu\, \varepsilon_\nu]\, s_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu [A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu\, \varepsilon_\nu] \sum_{\mu=1}^{\nu} A_{\nu-\mu}^{-\beta-1} A_\mu^\beta\, s_\mu^\beta \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^\beta s_\mu^\beta \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \Delta_\nu [A_{n-\mu-\nu}^{\alpha-1} (\nu+\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu}]\, A_\nu^{-\beta-1}.
\end{aligned}$$

Hence

(3.2.1) $$U_n = \frac{\tau_n^\alpha}{n} = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{s_\mu^\beta}{\lambda_n}\right) \frac{\lambda_\mu A_\mu^\beta}{n A_n^\alpha}\, \widehat{E}^{\alpha,\beta+1}(n-\mu,\mu).$$

[14]) PATI and AHMAD [8], [9], [10].

CONDITION (i) b IS NECESSARY. For if $\sum a_n \varepsilon_n$ is summable $|C|$ whenever $s_n^\beta = O(\lambda_n)$, as $n \to \infty$, then, by Lemma 2, it is summable $|C|$ whenever $n a_n = O(\lambda_n)$, as $n \to \infty$.

Suppose that $\sum n^{-1} \lambda_n |\varepsilon_n| = \infty$. Let

$$a_n = n^{-1} \lambda_n \operatorname{sgn} \varepsilon_n,$$

then

$$n a_n = \lambda_n \operatorname{sgn} \varepsilon_n = O(\lambda_n).$$

But

$$\begin{aligned} \sum a_n \varepsilon_n &= \sum n^{-1} \lambda_n \varepsilon_n \operatorname{sgn} \varepsilon_n \\ &= \sum n^{-1} \lambda_n |\varepsilon_n| = \infty, \end{aligned}$$

so that $\sum a_n \varepsilon_n$ is not summable $|C|$. This is a contradiction.

CONDITION (i) a IS NECESSARY. In order that $\sum n^{-1} |\tau_n^\alpha| < \infty$, whenever $s_n^\beta = O(\lambda_n)$, as $n \to \infty$, by (3.2.1) and lemma 4, it is necessary that

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^\beta \lambda_\mu}{\mu A_\mu^\alpha} |\hat{E}^{\alpha,\beta+1}(\mu - \mu, \mu)| < \infty,$$

which is equivalent to

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu |\varepsilon_\mu| < \infty.$$

CONDITION (ii) IS NECESSARY. For (i) a and (i) b both imply $\varepsilon_n = O(1)$. Then, in order that $\sum n^{-1} |\tau_n^\alpha| < \infty$, whenever $s_n^\beta = O(\lambda_n)$, as $n \to \infty$, by (3.2.1) and Lemma 5, it is necessary that

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{A_\mu^\beta \lambda_\mu}{n A_n^\alpha} \hat{E}^{\alpha,\beta+1}(n - \mu, \mu) \right| < \infty,$$

i.e. that

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^\beta \lambda_\mu \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}^{\alpha,\beta+1}(n, \mu)}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \right| < \infty,$$

which, by Lemma 6, is equivalent to

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^\beta \lambda_\mu |\Delta^{\beta+1} \varepsilon_\mu| < \infty.$$

This completes the proof of the necessity part of the theorem.

SUFFICIENCY.

Since, by hypothesis and by (1.2.1),

$$T_n^\beta = O(\lambda_n), \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

We have

$$\begin{aligned} A_n^\alpha \tau_n^\alpha &= \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu \varepsilon_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \varepsilon_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} A_{\nu-\mu}^{-\beta-1} A_\mu^\beta t_\mu^\beta \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^\beta t_\mu^\beta \sum_{\nu=0}^{n-\mu} A_{n-\mu-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^{-\beta-1} \varepsilon_{\nu+\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \{(\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n - \mu, \mu)\} \left(\frac{t_\mu^\beta}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Hence, by Abel's transformation,

$$A_n^\alpha \tau_n^\alpha = \sum_{\mu=1}^{n-1} \Delta_\mu \{(\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)\} T_\mu^\beta + n A_n^\beta E^{\alpha,\beta}(0,n) T_n^\beta$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \Delta_\mu \{(\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)\} T_\mu^\beta + (n+1) A_{n+1}^\beta E^{\alpha,\beta}(-1,n+1) T_n^\beta$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \Delta_\mu \{(\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)\} T_\mu^\beta$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \Delta_\mu (\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu) T_\mu^\beta + \sum_{\mu=1}^{n} (\mu+1) A_{\mu+1}^\beta \Delta_\mu E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu) T_\mu^\beta.$$

Now

$$\Delta_\mu E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-\mu-1} A_\nu^{-\beta-1} \Delta_\mu (A_{n-\mu-\nu}^{\alpha-1} \varepsilon_{\nu+\mu}) + A_{n-\mu}^{-\beta-1} \varepsilon_n$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-\mu} A_\nu^{-\beta-1} A_{n-\mu-\nu}^{\alpha-1} \Delta \varepsilon_{\nu+\mu} + \sum_{\nu=0}^{n-\mu} A_\nu^{-\beta-1} A_{n-\mu-\nu}^{\alpha-2} \varepsilon_{\nu+\mu-1} -$$

$$- A_{n-\mu}^{-\beta-1} \Delta \varepsilon_n - A_{n-\mu}^{-\beta-1} \varepsilon_{n+1} + A_{n-\mu}^{-\beta-1} \varepsilon_n$$

$$= \bar{E}^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu) + E^{\alpha-1,\beta}(n-\mu,\mu+1).$$

Hence

$$A_n^\alpha \tau_n^\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} \Delta_\mu (\mu A_\mu^\beta) E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu) T_\mu^\beta + \sum_{\mu=1}^{n} (\mu+1) A_{\mu+1}^\beta \bar{E}^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu) T_\mu^\beta +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n} (\mu+1) A_{\mu+1}^\beta E^{\alpha-1,\beta}(n-\mu,\mu+1) T_\mu^\beta.$$

Therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^\alpha| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n^\alpha)^{-1} \sum_{\mu=1}^{n} |\Delta_\mu (\mu A_\mu^\beta)| \, |E^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)| \, |T_\mu^\beta| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n^\alpha)^{-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\mu+1) A_{\mu+1}^\beta |\bar{E}^{\alpha,\beta}(n-\mu,\mu)| \, |T_\mu^\beta| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n^\alpha)^{-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\mu+1) A_{\mu+1}^\beta |E^{\alpha-1,\beta}(n-\mu,\mu+1)| \, |T_\mu^\beta|.$$

Thus, it is sufficient to prove that

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} \sum_1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|E^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} < \infty; \\ \sum_2 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|\bar{E}^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} < \infty; \\ \sum_3 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|E^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} < \infty. \end{cases}$$

Proof of (3.2.2.).

CASE I. *When* $0=\alpha<\beta$. We have

$$\begin{aligned}\sum_1 &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} |A_n^{-\beta-1}| \frac{|\varepsilon_{n+\mu}|}{n+\mu} \\ &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{n} \lambda_n \sum_{\mu=1}^{n} |A_{n-\mu}^{-\beta-1}| A_\mu^\beta \\ &\leqq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1} \lambda_n |\varepsilon_n| < \infty,\end{aligned}$$

by hypothesis.

Next,

$$\begin{aligned}\sum_2 &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} |A_n^{-\beta-1}| \frac{|\bar{\varepsilon}_{n+\mu}|}{n+\mu} \\ &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\bar{\varepsilon}_n|}{n} \lambda_n \sum_{\mu=1}^{n} |A_{n-\mu}^{-\beta-1}| A_\mu^{\beta+1} \\ &\leqq K \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \lambda_n |\Delta \varepsilon_n| \\ &\leqq K \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \lambda_n |\varepsilon_n| + K \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \lambda_n |\varepsilon_{n+1}| \\ &< \infty,\end{aligned}$$

by hypothesis.

Lastly,

$$\begin{aligned}\sum_3 &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} |A_n^{-\beta-1}| \frac{|\varepsilon_{n+\mu+1}|}{n+\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} |A_{n-1}^{-\beta-1}| \frac{|\varepsilon_{n+\mu}|}{n+\mu} \\ &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{n} \lambda_n \sum_{\mu=1}^{n} |A_{n-\mu}^{-\beta-1}| A_\mu^{\beta+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{n+1} \lambda_n \sum_{\mu=1}^{n} |A_{n-\mu}^{-\beta-1}| A_\mu^{\beta+1} \\ &\leqq K \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \lambda_n |\varepsilon_{n+1}| + K \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \lambda_n |\varepsilon_{n+1}| \\ &< \infty,\end{aligned}$$

by hypothesis.

CASE II. *When* $0<\alpha\leqq\beta$. We have

$$\begin{aligned}\sum_1 &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \left(\sum_{n=0}^{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \right) \frac{|E^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\ &= \sum_{1,1} + \sum_{1,2}, \text{ say,} \\ \sum_2 &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \left(\sum_{n=0}^{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \right) \frac{|\bar{E}^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\ &= \sum_{2,1} + \sum_{2,2}, \text{ say,}\end{aligned}$$

and

$$\sum_3 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \Big(\sum_{n=0}^{k+1} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \Big) \frac{|E^{\alpha-1,\beta}(n, \mu+1)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}}$$
$$= \sum_{3,1} + \sum_{3,2}, \text{ say.}$$

Hence, it is sufficient for our purpose to show that

(3.2.3) $$\sum_{s,1} < \infty, \qquad (s = 1, 2, 3);$$

(3.2.4) $$\sum_{s,2} < \infty, \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Proof of (3.2.3.)

We have

$$\sum_{1,1} \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n-\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu}|$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{k} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu}| \sum_{n=\nu}^{k} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} -$$
$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta} \lambda_\mu \sum_{\nu=0}^{k} \frac{|A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu}|}{(\nu+\mu) A_{\nu+\mu}^{\alpha}} \sum_{n=0}^{k-\nu} A_n^{\alpha-1}$$
$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^{\beta} \lambda_\mu}{\mu A_\mu^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{k} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu}| \, A_{k-\nu}^{\alpha}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} O\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha-1} \lambda_\mu |\varepsilon_{\nu+\mu}| \Big)$$
$$< \infty,$$

by hypothesis.

Next, we have

$$\sum_{2,1} \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\bar{\varepsilon}_{\nu+\mu}|$$
$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu}{\mu A_\mu^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{k} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\bar{\varepsilon}_{\nu+\mu}| \sum_{n-0}^{k-\nu} A_n^{\alpha-1}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} O\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu |\Delta \varepsilon_{\nu+\mu}| \Big)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} O\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu |\varepsilon_{\nu+\mu}| \Big) +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{k} O\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu |\varepsilon_{\nu+\mu+1}| \Big)$$
$$< \infty,$$

by hypothesis.

Lastly, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{3,1} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} |A_{n-\nu}^{\alpha-2}| \, |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu+1}| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{\nu=0}^{k+1} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu+1}| \sum_{n=\nu}^{k+1} \frac{|A_{n-\nu}^{\alpha-2}|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^{\beta+1}}{\mu A_\mu^{\alpha}} \lambda_\mu \sum_{\nu=0}^{k+1} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu+1}| \sum_{n=0}^{k+1-\nu} |A_n^{\alpha-2}| \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^{\beta+1}}{\mu A_\mu^{\alpha}} \lambda_\mu \sum_{\nu=0}^{k+1} |A_\nu^{-\beta-1}| \, |\varepsilon_{\nu+\mu-1}| \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} O\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu |\varepsilon_{\nu+\mu-1}| \Big) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis. This completes the proof of (3.2.3).

Proof of (3.2.4).

CASE (II_1). *When* $0<\alpha<\beta$.

By Lemma 7(i), we have

(3.2.5)a $$|E^{\alpha,\beta}(n,\mu)| = O\Big(\sum_{r=0}^{h} \sum_{p=0}^{r} |Q^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu)| \Big)$$

where

$$Q^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_\nu^{h-r} \sum_{j=0}^{\nu} A_j^{-\beta+p-1} \varepsilon_{j+\mu}.$$

We write

(3.2.6)a $$Q^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu) = \sum_{s=1}^{3} Q_s^{\alpha,\beta}(n,\mu),$$

where

(3.2.7)a $$Q_1^{\alpha,\beta}(n,\mu) = A_n^{\alpha-r-1} \Delta^{\beta-p} \varepsilon_\mu,$$

(3.2.8)a $$Q_2^{\alpha,\beta}(n,\mu) = -A_n^{\alpha-r-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j^{-\beta+p-1} \varepsilon_{j+\mu},$$

(3.2.9)a $$Q_3^{\alpha,\beta}(n,\mu) = -\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_\nu^{h-r} \sum_{j=\nu+1}^{n} A_j^{-\beta+p-1} \varepsilon_{j+\mu}.$$

Hence, in order to prove that $\sum_{1,2}<\infty$, by (3.2.5)a and (3.2.6)a, it is sufficient to show that, for $0\leqq p\leqq r\leqq h$,

(3.2.10)a $$\sum_{1,2,s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta} \lambda_\mu \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|Q_s^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} < \infty, \qquad (s=1,2,3).$$

Proof of (3.2.10)a.

We can easily see that, for $n>k$, $Q_2^{\alpha,\beta}(n,\mu)\equiv 0$ when β is an integer, and $Q_3^{\alpha,\beta}(n,\mu)\equiv 0$ when α and β are both integers.

Since $0 \leqq p \leqq r \leqq h < \alpha < \beta$. By (3.2.7)a, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{1,2,1} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1} |\Delta^{\beta-p} \varepsilon_\mu|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu |\Delta^{\beta-p} \varepsilon_\mu| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu |\Delta^{\beta-p} \varepsilon_\mu| \frac{1}{\mu A_\mu^r} \qquad \text{(by Lemma 1)} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-p-1} \lambda_\mu |\Delta^{\beta-p} \varepsilon_\mu| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis and Lemma 9.

Next, by (3.2.8)a, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{1,2,2} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \sum_{j=n+1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \sum_{n=0}^{j-1} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha-1} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+\alpha-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j |\varepsilon_j| \sum_{\mu=1}^{j-1} \mu^{\beta-\alpha-1} |A_{j-\mu}^{-\beta+\alpha-1}| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j |\varepsilon_j| \left| \sum_{\mu=0}^{j} A_\mu^{\beta-\alpha-1} A_{j-\mu}^{-\beta+\alpha-1} \right| + \\
&\quad + K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha-1} \lambda_j |\varepsilon_j| + K \sum_{j=2}^{\infty} j^{-\beta+\alpha-1} \lambda_j |\varepsilon_j| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis.

Lastly, by (3.2.9)a, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{1,2,3} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} |A_n^{\alpha-h-2}| A_\nu^{h-r} \sum_{j=\nu+1}^{n} |A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \sum_{j=1}^{n} |A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \sum_{\nu=0}^{j-1} |A_n^{\alpha-h-2}| A_\nu^{h-r} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \sum_{\nu=0}^{j-1} A_\nu^{h-r} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{|A_n^{\alpha-h-2}|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^\alpha} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|A_j^{-\beta+p-1}| |\varepsilon_{j+\mu}|}{(j+\mu) A_{j+\mu}^\alpha} \sum_{\nu=0}^{j-1} A_{j-\nu}^{\alpha-h-1} A_\nu^{h-r} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^\beta \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+\alpha-1}| |\varepsilon_{j+\mu}| \frac{1}{(j+\mu) A_{j+\mu}^\alpha}
\end{aligned}$$

$$\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda_j |\varepsilon_j|}{j A_j^{\alpha}} \sum_{\mu=1}^{j-1} A_{\mu}^{\beta} |A_{j-\mu}^{-\beta+\alpha-1}|$$

$$\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha-1} \lambda_j |\varepsilon_j|$$

$$< \infty,$$

by hypothesis. This completes the proof of (3.2.10) a.

Again, by Lemma 7 (ii), we have

(3.2.5) b $$|\bar{E}^{\alpha,\beta}(n,\mu)| = O\left(\sum_{r=0}^{h} \sum_{p=0}^{r} |\bar{Q}^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu)|\right)$$

where

$$\bar{Q}^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_{\nu}^{h-r} \sum_{j=0}^{\nu} A_j^{-\beta+p-1} \bar{\varepsilon}_{j+\mu}.$$

We write

(3.2.6) b $$\bar{Q}^{\alpha,\beta}(r,p;n,\mu) = \sum_{s=0}^{3} \bar{Q}_s^{\alpha,\beta}(n,\mu),$$

where

(3.2.7) b $$\bar{Q}_1^{\alpha,\beta}(n,\mu) = A_n^{\alpha-r-1} \Delta^{\beta-p} \bar{\varepsilon}_{\mu},$$

(3.2.8) b $$\bar{Q}_2^{\alpha,\beta}(n,\mu) = -A_n^{\alpha-r-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j^{-\beta+p-1} \bar{\varepsilon}_{j+\mu},$$

(3.2.9) b $$\bar{Q}_3^{\alpha,\beta}(n,\mu) = -\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} A_{\nu}^{h-r} \sum_{j=\nu-1}^{n} A_j^{-\beta+p-1} \bar{\varepsilon}_{j-\mu}.$$

Hence, in order to prove that $\sum_{2,2} < \infty$, by (3.2.5) b and (3.2.6) b, it is sufficient to show that, for $0 \leqq p \leqq r \leqq h$,

(3.2.10) b $$\sum_{2,2,s} = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1} \lambda_{\mu} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|\bar{Q}_s^{\alpha,\beta}(n,\mu)|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} < \infty, \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Proof of (3.2.10) b.

We can easily see that, for $n > k$, $\bar{Q}_2^{\alpha,\beta}(n,\mu) \equiv 0$ when β is an integer, and $\bar{Q}_3^{\alpha,\beta}(n,\mu) \equiv 0$ when α and β are both integers. Since $0 \leqq p \leqq r \leqq h < \alpha < \beta$. First, by (3.2.7) a, we have

$$\sum_{2,2,1} = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1} \lambda_{\mu} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1} |\Delta^{\beta-p} \varepsilon_{\mu}|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}}$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1} \lambda_{\mu} |\Delta^{\beta-p} \bar{\varepsilon}_{\mu}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1} \lambda_{\mu} |\Delta^{\beta-p+1} \varepsilon_{\mu}| \frac{1}{\mu A_{\mu}^{r}} \qquad \text{(by Lemma 1)}$$

$$\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-p} \lambda_{\mu} |\Delta^{\beta-p+1} \varepsilon_{\mu}|$$

$$< \infty,$$

by hypothesis and Lemma 9.

Next, by (3.2.8)b, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{2,2,2} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j-\mu} \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j-\mu} \right| \sum_{n=0}^{j-1} \frac{A_n^{\alpha-r-1}}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \left| A_j^{-\beta+\alpha-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j+\mu} \right| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \left| \bar{\varepsilon}_j \right| \sum_{\mu=1}^{j-1} \mu^{\beta-\alpha} \left| A_{j-\mu}^{-\beta+\alpha-1} \right| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \Delta \varepsilon_j \right| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \varepsilon_j \right| + K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \varepsilon_{j-1} \right| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis.

Lastly, by (3.2.9)b, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{2,2,3} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} \left| A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} \right| A_\nu^{h-r} \sum_{j=\nu+1}^{n} \left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j-\mu} \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j-\mu} \right| \sum_{\nu=0}^{j-1} \left| A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} \right| A_\nu^{h-r} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j-\mu} \right| \sum_{\nu=0}^{j-1} A_\nu^{h-r} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{\left| A_{n-\nu}^{\alpha-h-2} \right|}{(n+\mu) A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left| A_j^{-\beta+p-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j+\mu} \right|}{(j+\mu) A_{j+\mu}^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{j-1} A_{j-\nu}^{\alpha-h-1} A_\nu^{h-r} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{\beta+1} \lambda_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \left| A_j^{-\beta+\alpha-1} \right| \left| \bar{\varepsilon}_{j+\mu} \right| \frac{1}{(j+\mu) A_{j+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \frac{\left| \bar{\varepsilon}_j \right|}{j A_j^{\alpha}} \sum_{\mu=1}^{j-1} A_\mu^{\beta-1} \left| A_{j-\mu}^{-\beta+\alpha-1} \right| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \Delta \varepsilon_j \right| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \varepsilon_j \right| + K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha} \lambda_j \left| \varepsilon_{j-1} \right| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis. This completes the proof of (3.2.10)b.

Finally, by Lemma 7(i), we have

$$(3.2.5)\,c \qquad |E^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1)| = O\Big(\sum_{r=0}^{h}\sum_{p=0}^{r}|Q^{\alpha-1,\beta}(r,p;n,\mu+1)|\Big)$$

where

$$Q^{\alpha-1,\beta}(r,p;n,\mu+1) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-3} A_{\nu}^{h-r} \sum_{j=0}^{\nu} A_j^{-\beta+p-1}\,\varepsilon_{j+\mu+1}.$$

We write

$$(3.2.6)\,c \qquad Q^{\alpha-1,\beta}(r,p;n,\mu+1) = \sum_{s=1}^{3} Q_s^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1),$$

where

$$(3.2.7)\,c \qquad Q_1^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1) = A_n^{\alpha-r-2}\,\Delta^{\beta-p}\,\varepsilon_{\mu+1},$$

$$(3.2.8)\,c \qquad Q_2^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1) = -\,A_n^{\alpha-r-2}\sum_{j=n+1}^{\infty} A_j^{-\beta+p-1}\,\varepsilon_{j+\mu+1},$$

$$(3.2.9)\,c \qquad Q_3^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1) = -\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-h-3} A_{\nu}^{h-r} \sum_{j=\nu+1}^{n} A_j^{-\beta+p-1}\,\varepsilon_{j+\mu+1}.$$

Hence, in order to prove that $\sum_{3,2}<\infty$, by (3.2.5)c and (3.2.6)c, it is sufficient to show that, for $0\leqq p\leqq r\leqq h$,

$$(3.2.10)\,c \qquad \sum_{3,2,s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{|Q_s^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1)|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} < \infty, \qquad (s=1,2,3).$$

Proof of (3.2.10) c.

We can easily see that, for $n>k+1$, $Q_2^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1)=0$ when β is an integer, and $Q_3^{\alpha-1,\beta}(n,\mu+1)\equiv 0$ when α and β are both integers.

Since $0\leqq p\leqq r\leqq h<\alpha<\beta$. First, by (3.2.7)c, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{3,2,1} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{|A_n^{\alpha-r-2}||\Delta^{\beta-p}\,\varepsilon_{\mu+1}|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu}|\Delta^{\beta-p}\,\varepsilon_{\mu+1}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n^{\alpha-r-2}|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq K\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha}\,\lambda_{\mu}|\Delta^{\beta-p}\,\varepsilon_{\mu+1}| \\
&\leqq K\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha}\,\lambda_{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} |A_{\nu}^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{\nu+\mu+1}| \\
&\leqq K\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}|\varepsilon_{\nu+1}| \sum_{\mu=1}^{\nu} |A_{\nu-\mu}^{-\beta+p-1}|\,\mu^{\beta-\alpha} \\
&\leqq K\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\beta-\alpha}\,\lambda_{\nu}|\varepsilon_{\nu+1}| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis.

Next, by (3.2.8)c, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{3,2,2} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n^{\alpha-r-2}|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{j=n+1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \sum_{n=0}^{j-1} \frac{|A_n^{\alpha-r-2}|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta-\alpha}\,\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j\,|\varepsilon_{+1}| \sum_{\mu=1}^{j-1} \mu^{\beta-\alpha} |A_{j-\mu}^{-\beta+p-1}| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha}\,\lambda_j\,|\varepsilon_{j+1}| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis.

Lastly, by (3.2.9)c, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{3,2,3} &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{v=0}^{n} |A_{n-v}^{\alpha-h-3}|\,A_v^{h-r} \sum_{j=v+1}^{n} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \sum_{v=0}^{j-1} |A_{n-v}^{\alpha-h-3}|\,A_v^{h-r} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}| \sum_{v=0}^{j-1} A_v^{h-r} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{|A_{n-v}^{\alpha-h-3}|}{(n+\mu)\,A_{n+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|A_j^{-\beta+p-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}|}{(j+\mu)\,A_{j+\mu}^{\alpha}} \sum_{v=0}^{j-1} |A_{j-v}^{\alpha-h-2}|\,A_v^{h-r} \\
&\leqq K \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\beta+1}\,\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} |A_j^{-\beta+h-1}|\,|\varepsilon_{j+\mu+1}|\,\frac{1}{(j+\mu)\,A_{j+\mu}^{\alpha}} \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \frac{|\varepsilon_{j+1}|}{j\,A_j^{\alpha}} \sum_{\mu=1}^{j-1} A_{\mu}^{\beta+1}\,|A_{j-\mu}^{-\beta+h-1}| \\
&\leqq K \sum_{j=2}^{\infty} j^{\beta-\alpha}\,\lambda_j\,|\varepsilon_{j+1}| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis. This completes the proof of (3.2.10)c and thus, completes the proof of (3.2.4) for the case $0<\alpha<\beta$.

Case (II_2). *When* $\alpha=\beta\geqq 0$ [15]).

We see that, by Lemma 8, the inequalities (3.2.4) hold in this case also.

[15]) For this case, the theorem has recently been proved by Pati and Ahmad, in the series of papers, [8], [9], [10].

Case III. *When* $\alpha > \beta \geqq 0$. Then, by what we have proved, $\sum a_n \varepsilon_n$ is summable $|C, \beta|$. By Lemmas 2 and 3, it is also summable $|C, \alpha|$.

This completes the proof of the sufficiency part of the theorem, and also the proof of the theorem.

I should like to express my warmest thanks to Dr. T. Pati for his kind encouragement and valuable guidance.

References

[1] Bosanquet, L. S.: Note on the Bohr-Hardy theorem. J. London Math. Soc. **17**, 166—173 (1942).

[2] —, and H. C. Chow: Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc. **32**, 73—82 (1957).

[3] Chow, H. C.: Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc. **29**, 459—476 (1954).

[4] Fekete, M.: Zur Theorie der divergenten Reihen. Math. es termesz értesito (Budapest) **29**, 719—726 (1911).

[5] Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949.

[6] Kogbetliantz, E.: Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. Math. (2) **49**, 234—256 (1925).

[7] — Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques. Mémorial Sci. Math. No. 51 (1931).

[8] Pati, T., and Z. U. Ahmad: On the absolute summability factors of infinite series I. Tôhoku Math. J. **12**, 222—232 (1960).

[9] — — On the absolute summability factors of infinite series II. Indian J. Math. **2**, 29—39 (1960).

[10] — — On the absolute summability factors of infinite series III. Indian J. Math. **2**, 73—87 (1960).

University of Allahabad, Allahabad, India

(Eingegangen am 1. September 1960)

Vorlesungen
über Differential- und Integralrechnung

Von Professor Dr. R. COURANT, New York

Erster Band

Funktionen einer Veränderlichen

Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck

Mit 126 Textfiguren. XII, 450 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 33,—

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Es ist nicht leicht, die Besprechung für die 3. Auflage eines Buches zu schreiben, das seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1927 zu den Standardwerken der Literatur über Differential- und Integralrechnung gehört und in der Zwischenzeit auch in mehrere Fremdsprachen übersetzt wurde. Die Beliebtheit von „Courants Vorlesungen" erklärt sich vor allem daraus, daß damit der erste und taktisch ausgezeichnet gelungene Versuch einer gemeinsamen Begründung der Funktionaloperationen „Differentiation" und „Integration" unternommen wurde. Ohne Verzicht auf Präzision verstand es der Verfasser, den Stoff in einer undogmatischen Form darzustellen, die auftretenden abstrakten Begriffsbildungen jeweils anschaulich zu motivieren und den Zusammenhang der mathematischen Analysis mit der physikalischen Realität bei allen Gelegenheiten besonders zu entwickeln." *Internationale Mathematische Nachrichten*

„Die neue Auflage des bekannten Werkes von R. COURANT zeigt im wesentlichen das gleiche Bild wie die früheren Auflagen des bewährten Buches. Es ist für den Anfänger gut lesbar und außerordentlich lehrreich geschrieben und stellt in ausgezeichneter Weise die Verbindung von der Schul-Mathematik zur höheren, oder wie der Verfasser sagt „neueren" Mathematik dar. Bei aller Bezugnahme auf die Anschauung ist es sachlich völlig streng und berücksichtigt in einem besonders für Anfänger sehr nützlichen Maße auch die Anwendungen. Die Auswahl des Stoffes unterstützt vortrefflich das Pensum des Studierenden in den ersten Semestern. Dem Werk kann nur weiteste Verbreitung gewünscht werden." *VDI-Zeitschrift*

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundzüge der mathematischen Logik

Von D. Dr. HEINRICH SCHOLZ †,
em. ord. Professor der mathematischen Logik und Grundlagenforschung an der Universität Münster/Westf.,

und Dr. GISBERT HASENJAEGER,
apl. Professor der mathematischen Logik und Grundlagenforschung an der Universität Münster/Westf.

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 106)

XVI, 504 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 93,50; Ganzleinen DM 98,—

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Aussagenkalkül: Konstituierung des Aussagenkalküls. Semantik (Allgemeine Semantik. Spezielle Semantik. Begriff und Theorie der mengenrelativen Erfüllung.) Deduktionstheoretische Betrachtungen · Prädikatenkalkül: Allgemeine Grundlegung. Semantik (Allgemeine Semantik. Theorie der numerischen Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit im PFK. Das Entscheidungsproblem im PFK). Syntax (Allgemeine Syntax. Spezielle Syntax). Beziehungen zwischen Semantik und Syntax im PFK (Die BOLZANOsche Folgerungsrelation im PFK. Die semantische Vollständigkeit des PFK*) · Prädikatenkalkül mit Identität (I-Kalkül): Allgemeine Grundlegung. Semantik (Allgemeine Semantik. Spezielle Semantik. Theorie der numerischen Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit. Die Entscheidbarkeit der Menge der einstelligen I-Ausdrücke ohne Funktionale). Syntax (Allgemeine Syntax. Spezielle Syntax). Beziehungen zwischen Syntax und Syntax im IFK (Folgerungsbegriffe. Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit im IFK. Folgerungen) · Einführung in die Stufenlogik: Die Logik der zweiten Stufe. Die volle Typentheorie. Erweiterungen der Typenlogik · Die Theoreme von CHURCH und GÖDEL · Anhang: Regellogik · Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany